

سلسلة الرياضيات العالية
مساثل ومقارين

MingeeL.com^٢

الهندسة التحليلية

الدكتور موفق دعبول

الدكتور عادل يودان

الناشر

مؤسسة الرسالة

مكتبة الكرازي
دمشق - حلب

مكتبة دار الفتح
دمشق - ص.ب. ٤٧٥

جميع الحقوق محفوظة

الطبعة الرابعة

١٤٠٢ هـ - ١٩٨٢ م

مؤسسة الرسالة - بيروت - شارع سورية - بناية صمدي وصالحه
هاتف ٢٩٥٥٠١ - ٢٤١٦٩٢ ص ب ١١٧٤٦٠ برقياً: بيوشران



الفصل الأول

الوحدات والوسعة

١ - تعيين نقطة على محور : إذا اخترنا على مستقيم مفروض نقطة ما O فعندئذ ينقسم هذا المستقيم إلى نصفين غير متمايزين ، ولكننا بوضع إشارة على أحدهما نستطيع أن نميز هذا النصف الذي ندعوه بالموجب عن الآخر الذي ندعوه بالسالب . وبواسطة هذه العملية يتحول المستقيم إلى محور موجه . وأما وضع نقطة ما p على هذا المحور فإنه يتحدد بعدد جبري x قيمته المطلقة تمثل بعد النقطة p عن O وأما إشارته فهي موجبة أو سالبة حسباً تقع النقطة على الجزء الموجب من المحور أو على الجزء السالب منه . نسمي عادة هذا العدد الجبري فصل النقطة p ونكتب $op = x$.

٢ - تعيين نقطة في مستو : يتعين وضع نقطة في مستو بأشكال متعددة نذكر منها :

١ - الطريقة الديكارتية : نأخذ في المستوي محورين متقاطعين ox ، oy (قائمين أو مائلين) ندعوها بالمحورين الاحداثيين . ولتعيين وضع نقطة ما p من المستوي نرسم منها مستقيمين موازيين للمحورين . ليكن p_1 و p_2 نقطتي تقاطع هذين المستقيمين مع المحورين ، ولتكن x فصل النقطة p_1 على ox و y فصل النقطة p_2 على oy . نسمي عادة العددين الجبريين x و y احداثيي النقطة p الديكارتيين .

ب - الطريقة القطبية : نأخذ في المستوي محوراً ox ندعوه بالمحور القطبي

ولنتخذ نقطة ما o عليه ندعوها بالقطب . ان وضع أي محور آخر في المستوي مثل oy يتعين بالزاوية التي يصنعها مع ox . أي بالزاوية التي يجب أن يدورها ox لينطبق على oy . ولما كان هنالك جهتان للدوران فافترضنا نعتبر احدهما ، وهي الخالفة لجهة دوران عقارب الساعة ، جهة الدوران الموجبة .

واذا كانت p نقطة ما من المستوي و ou محوراً ماراً بـ p ، فان وضع هذه النقطة يتعين بالزاوية θ التي يصنعها المحور ou مع المحور ox وبفصل النقطة p على المحور ou ولترمز له بـ r . نسمي θ الزاوية القطبية لـ p كما يسمى العددان الجبريان r و θ الاحداثيين القطبيين للنقطة p .

ان كل مجموعة قطبية (r, θ) تعين نقطة وحيدة في المستوي ، في حين يقابل كل نقطة مفروضة من المستوي مجموعتان من الاحداثيات القطبية .

$$(r, \theta + 2k\pi) ; (-r, \theta + \pi + 2k\pi) \quad (k \text{ عدد صحيح})$$

٣ - تعيين نقطة في الفراغ : يتعين وضع النقطة في الفراغ بطرق عدة

نذكر منها :

١ - الطريقة الديكارتية : لتأخذ ثلاثة محاور غير وافية في مستو واحد

ox و oy و oz . ان كل محورين منها يعينان مستوياً ندعوه بالمستوي الاحداثي . نرسم من النقطة p في الفراغ ثلاثة مستويات موازية للمستويات الاحداثية فتقطع المحاور في ثلاث نقاط . ان هذه النقاط الثلاث تتعين بفواصلها على محاورها . ولتكن هذه الفواصل x و y و z . ان وضع النقطة p يتعين تماماً بهذه الاعداد الثلاثة التي تسمى احداثيات النقطة p الديكارتية .

نفهم من الرمز $p(x, y, z)$ النقطة التي احداثياتها x و y و z .

تسمى المحاور الثلاثة ox و oy و oz ثلاثية . ونقول عن هذه الثلاثية إنها مباشرة (أو طردية) إذا رأى راصد مضجع على المحور oz ومنتجه مثله ، المحور ox عن يمينه والمحور oy عن يساره ، وإلا قلنا عن الثلاثية إنها غير

مباشرة (أو عكسية) . ونقول عن الثلاثية إنها قائمة إذا كانت محاورها متعامدة
مثنى مثنى .

ب - الطريقة الاسطوانية : نأخذ ثلاثية قائمة $oxyz$ (ثلاثة محاور
 ox, oy, oz متعامدة في o) إن وضع النقطة p في الفراغ يتم بان نرسم من
النقطة p مستقيماً موازياً لـ oz فيقطع المستوي xoy بالنقطة m ، ومستويّاً
عمودياً عليه فيقطعه في النقطة m_1 . ان وضع النقطة p يتمين تماماً إذا عرفنا
 m و m_1 . لنعين النقطة m في المستوي xoy باحداثيها القطبيين (r, θ)
والنقطة m_1 بفصلها على oz وليكن z تسمى الاعداد الثلاثية (r, θ, z)
الاحداثيات الاسطوانية للنقطة p .

ج - الطريقة القطبية الفراغية : لتعين وضع نقطة مفروضة p من الفراغ
بهذه الطريقة نأخذ ثلاثية قائمة $oxyz$ ومحوراً ot ماراً من p . إن الاعداد .

$$\vec{op} = \varrho, \quad \theta = (\vec{oz}, \vec{ot}) ; \quad \varphi = (\vec{ox}, \vec{ou})$$

بفرض \vec{ou} هو مسقط المحور ot على المستوي oxy ؛ كافية لتعين وضع
 p . نسمى هذه الاعداد الاحداثيات القطبية الفراغية .

د - القياس الجبري \overline{AB} للقطعة مستقيمة على محور تساوي حاصل طرح
فصل مبدئها A من فصل نهايتها B . وإذا كانت النقط A, B, C, \dots, L
مبعثرة على محور فمعتدئذ تصح علاقة شال الآتية :

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \dots + \overline{LA} = 0$$

ه - توجد بين الاحداثيات الديكارتية القائمة في مستو والاحداثيات القطبية
العلاقات الآتية :

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$$

و - يعطى البعد d بين النقطة $p_1 (x_1, y_1)$ والنقطة $p_2 (x_2, y_2)$

في المستوي المنسوب الى المحورين المتعامدين ox و oy بالدستور الآتي :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

٧ - إن احداثيات النقطة التي تقسم القطعة PQ بالنسبة m هي :

$$x = \frac{x_1 - m x_2}{1 - m} \quad y = \frac{y_1 - m y_2}{1 - m}$$

حيث $Q = Q(x_2, y_2)$ و $P = p(x_1, y_1)$.
فاذا كانت $m = -1$ فالتنا نحصّل على احداثيي منتصف القطعة .

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

إذا حقت أربع نقط $ABCD$ كائنة على محور موجه العلاقة التالية :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = - \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

فلنا إنها تشكل تقسيماً توافقياً .

٨ - نسمي ظل أصغر زاوية موجبة يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ميل المستقيم . فاذا كانت النقطتان $M_1(x_1, y_1)$ و $M_2(x_2, y_2)$ واقعيتن على المستقيم فنعدنّ يعطى ميل المستقيم m بالعلاقة التالية :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

٩ - العلاقات التي تربط الاحداثيات الديكارية القائمة بالاحداثيات الاسطوانية هي :

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \quad z = z \quad :$$

١٠ - العلاقات التي تربط الاحداثيات الديكارية القائمة بالاحداثيات القطبية الفراغية هي :

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi \quad z = \rho \cos \theta$$

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad ; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \quad : \text{و}$$

$$\cos \Theta = \frac{z}{\varrho} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

١١ - يعطى البعد d بين نقطتين في الفراغ معرفتين بالاحداثيات الديكارية العامة (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) بالدستور الآتي :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

١٢ - ان احداثيات النقطة التي تقسم القطعة PQ بالنسبة m هي :

$$x = \frac{x_1 - m x_2}{1 - m} \quad ; \quad y = \frac{y_1 - m y_2}{1 - m} \quad ; \quad z = \frac{z_1 - m z_2}{1 - m}$$

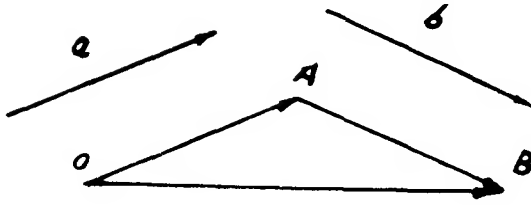
حيث : $Q = Q(x_2, y_2, z_2)$ و $P = P(x_1, y_1, z_1)$

١٣ - الشعاع هو قطعة مستقيمة موجبة ذات مبدأ ونهاية . ويتميز بأربعة عناصر هي المبدأ والمنحنى والجهة والطول (أو الشدة أو القيمة المطلقة) . يرمز لطول الشعاع \vec{v} بالرمز $|\vec{v}|$. القياس الجبري لشعاع محمول على محور هو طول هذا الشعاع مسبوق بإشارة + أو - حسباً تكون جهة الشعاع مثل جهة المحور أو معاكسة لها ، ويرمز القياس الجبري للشعاع \vec{v} بالرمز \bar{v} أو اختصاراً v إذا لم يخش الالتباس .

شعاع واحدة المحور هو شعاع طوله واحدة الطول محمول على المحور ومتجه مثله .

تقول عن شعاعين إنها متساويان إذا اتفقا في المنحنى والجهة والطول ، وإنهما متعاكسان إذا اتفقا في المنحنى والطول واختلفا في الجهة فقط .

١٤ - مجموع الشعاعين \vec{a} و \vec{b} هو شعاع جديد \vec{v} نحصل عليه بالشكل الآتي :



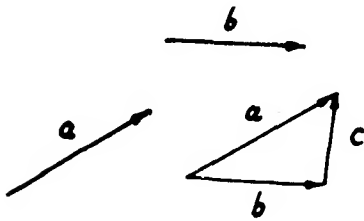
شكل - ١

نرسم من O شعاعاً مساوياً لـ \vec{a} وليكن \vec{OA} ومن نهايته نرسم شعاعاً مساوياً لـ \vec{b} وليكن \vec{AB} ، نصل O بـ B فيكون \vec{OB} هو الشعاع \vec{v} المطلوب ونكتب .

$$\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$$

ولجمع عدد من الأشعة ننشئ من نقطة ما O شعاعاً يساوي الشعاع الأول ومن نهايته نرسم شعاعاً آخر يساوي الشعاع الثاني وهكذا حتى الشعاع الأخير . يسمى الشعاع الذي مبدؤه في O ونهايته نهاية الشعاع الأخير بمجموع الأشعة المفروضة .

إن عملية جمع الأشعة تخضع للخاصة التجميعية (أي يمكن عند الجمع تعويض مجموعة جزئية من الأشعة المراد جمعها بمجموعها) وللخاصة التبديلية (أي يمكن تغيير ترتيب الأشعة عند جمعها) .



شكل - ٢

١٥ - طرح شعاع \vec{a} من شعاع

\vec{b} هو إيجاد شعاع ثالث \vec{c} لو أضفناه

لـ \vec{b} لننتج \vec{a} ، ونكتب :

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

٤ - حاصل ضرب شعاع \vec{v} بعدد جبري m هو شعاع جديد له منحى الشعاع السابق وجته إذا كانت m موجبة والجهة الماكسة إذا كانت m سالبة ، وأما طوله فيساوي جداء القيمة المطلقة لـ m بطول الشعاع \vec{v} .

وبالعكس إذا كان لدينا شعاعان متوازيان \vec{v}_1 و \vec{v}_2 فانه يمكن أن نجد عددا مثل m يكون من أجله :

$$\vec{v}_2 = m \vec{v}_1$$

إن القيمة المطلقة لهذا العدد تساوي نسبة طولي الشعاعين وإشارته موجبة إذا كان الشعاعان من جهة واحدة وسالبة إذا كانا من جهتين مختلفتين . نرى بسهولة أن :

$$m (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = m \vec{a} + m \vec{b} + m \vec{c}$$

وإذا كان الشعاع \vec{v} عمولاً على محور شعاع واحدته \vec{i} وكان v القياس الجبري

لهذا الشعاع فعندئذ يمكننا أن نكتب :

$$\vec{v} = v \vec{i}$$

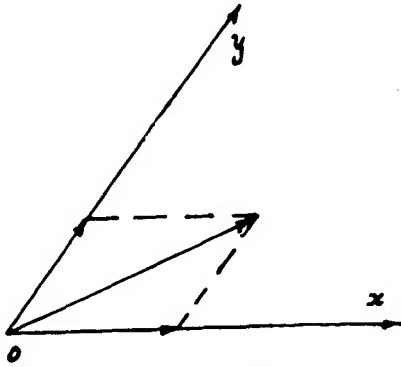
١٦ - يمكن تفريق كل شعاع

\vec{v} إلى مركبتين عمولتين على محورين

متقاطعين وذلك على الشكل الآتي :

نرسم من O نقطة تقاطع المحورين

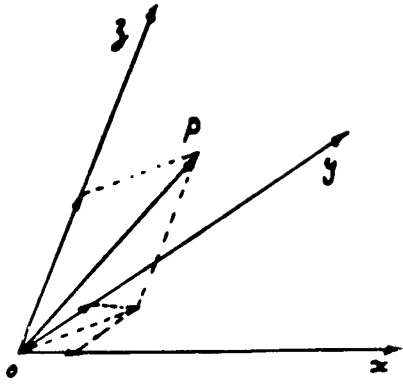
شعاعاً مساوياً للشعاع المفروض . ومن



شكل - ٣

نهاية هذا الشعاع نرسم مستقيمين موازيين للمحورين يقطعانها بنقطتين مثل A و B

فيكون \vec{OA} و \vec{OB} مركبتي هذا الشعاع .



$$\vec{v} = \vec{OA} + \vec{OB}$$

بنفس الطريقة يمكن تفريق

شعاع إلى ثلاث مركبات محمولة على ثلاثة محاور متقاطعة .

إذا كان x و y احدائبي

نقطة A في المستوى xoy وإذا

كان \vec{i} و \vec{j} شعاعي واحدة

المحورين ox و oy فنحن نلذ يكون :

$$\vec{OA} = x \vec{i} + y \vec{j}$$

وفي الفراغ يكون : $\vec{OP} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$

وإذا كان $A (x_1, y_1, z_1)$ مبدأ الشعاع و $B (x_2, y_2, z_2)$ نهايته

فنحن نلذ تكون مركبات هذا الشعاع هي :

$$X = x_2 - x_1 ; Y = y_2 - y_1 ; Z = z_2 - z_1$$

١٧ - مسقط نقطة ما M على محور اسقاطاً موازياً لمستوى مفروض هو

نقطة تقاطع مستو مار من النقطة ومواز للمستوي المفروض مع المحور .

يكون هذا الاسقاط قائماً إذا كان المستوي المفروض عمودياً على المحور .

مسقط شعاع على مستقيم هو شعاع مبدؤه مسقط المبدأ ونهايته مسقط النهاية .

ومسقط شعاع على محور هو عدد جبري يقيس القطعة التي مبدؤها مسقط

المبدأ ونهايتها مسقط النهاية .

مسقط نقطة ما M على مستو اسقاطاً موازياً لاستقامة مفروضة هو نقطة

تقاطع المستقيم المنشأ من النقطة والموازي للاستقامة المفروضة .

ويكون هذا الاسقاط قائماً إذا كانت الاستقامة المفروضة عمودية على مستوي

الاسقاط .

ومسقط شعاع على مستو هو شعاع مبداء مسقط المبدأ ونهايته مسقط النهاية .
 ١٨ - ان مسقط مجموع اشعة على مستقيم أو مستو هو مجموع مساقط هذه الاشعة .

١٩ - الجداء العددي لشعاعين \vec{a} و \vec{b} (ونزله بـ $(\vec{a} \cdot \vec{b})$) هو العدد الجبري :

$$|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

حيث θ زاوية الشعاعين \vec{a} و \vec{b}
 للجداء العددي الخواص الآتية .

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad - \text{ أ}$$

ب - ان الجداء العددي لشعاعين يساوي جداء طول احدهما بالقياس الجبري للمسقط العمودي للآخر عليه .

ج - ان الجداء العددي لشعاعين متعامدين معدوم .

$$(m_1 \vec{a} \cdot m_2 \vec{b}) = m_1 \cdot m_2 (\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad - \text{ د}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d} \quad - \text{ هـ}$$

و - الجداء العددي لشعاع بنفسه هو عبارة عن مربع طول هذا الشعاع .

ز - إذا كانت \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} اشعة الوحدة لثلاثة المحاور المتعامدة $oxyz$ فانه يكون :

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1 \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

ح - إذا كانت x_1 و y_1 و z_1 مركبات شعاع \vec{v}_1 و x_2 و y_2 و z_2

مركبات شعاع آخر \vec{v}_2 في مجموعة المحاور القائمة $oxyz$ فنحن نكتب :

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

ويكون كذلك :

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = v_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

٢٠ - الجداء الشعاعي (أو الخارجي أو الهندسي) للشعاعين \vec{a} و \vec{b}

ونرمز له بـ $\vec{a} \wedge \vec{b}$ أو بـ $\vec{a} \times \vec{b}$ هو شعاع ثالث \vec{c} عمودي على المستوى الموازي
لنحبي الشعاعين وطوله يقدر بمساحة متوازي الاضلاع المنشأ على الشعاعين أي :

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \theta$$

حيث θ زاوية الشعاعين . وأما جهته فنختارها على شكل تكون فيه

الاشعة الثلاثة \vec{a} و \vec{b} و \vec{c} ثلاثية طردية.

وللجداء الشعاعي الخواص الآتية :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = - \vec{b} \wedge \vec{a} \quad - \text{ أ}$$

ب - إن الجداء الخارجي لشعاعين يساوي الجداء الخارجي لاحدهما في
المسقط القائم للآخر على مستو عمودي على الاول .

ج - الجداء الخارجي لشعاعين متوازيين معدوم .

$$m_1 \vec{a} \wedge m_2 \vec{b} = m_1 m_2 (\vec{a} \wedge \vec{b}) \quad - \text{ د}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \wedge (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{a} \wedge \vec{d} + \vec{b} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{d} \quad - \text{ هـ}$$

و - إذا كانت \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} اشعة الواحدة لثلاثة المحاور المتعامدة $oxyz$ فانه

يكون :

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

ز - إذا كانت x_1 و y_1 و z_1 مركبات شعاع \vec{v}_1 و x_2 و y_2 و z_2 مركبات

شعاع آخر \vec{v}_2 في مجموعة المحاور القائمة $oxyz$ فنعتدث يكون :

٢١ - الجداء المختلط (الجبري) لثلاثة اشعة \vec{a} و \vec{b} و \vec{c} ونرمز له بـ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$:

هو عدد جبري H نحصل عليه بضرب \vec{a} بـ \vec{b} شعاعياً ثم بضرب الشعاع الحاصل بـ \vec{c} عددياً أى :

وللجداء المختلط الخواص التالية :

ب - إن الجداء المختلط لثلاثة أشعة يساوي بالقيمة المطلقة حجم متوازي السطوح المنشأ على هذه الأشعة الثلاثة وإما اشارته فهي + أو - حسبما تشكل \vec{a} و \vec{b} و \vec{c} ثلاثية طردية أو عكسة .

٢ - الشرط اللازم والكافي كي نوازي ثلاثة اشعة مستوياً واحداً هو أن يكون حداؤها المختلط معدوماً .

• - إذا كان $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ و $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ و $\vec{c}(x_3, y_3, z_3)$ فنحن نعلم يكون :

- 10 -

٢٢ - جملة الأشعة المستقلة خطياً : \vec{u}_1, \vec{u}_2 - نقول عن الشعاعين \vec{u}_1, \vec{u}_2 إنها مستقلة خطياً فيما إذا لم تتحقق العلاقة :

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 = \vec{0} \quad \alpha_1 \in R, \quad \alpha_2 \in R$$

إلا من أجل $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ وهذا يعني أن لا يكون لهذين الشعاعين منحى واحد أي أن لا يكونا شعاعين متوازيين (نرمز بـ R لحل الأعداد الحقيقية ونفهم من الرمز $\alpha \in R$ أن α عنصر من R أي أن α عدد حقيقي) .

ب - نقول عن الأشعة الثلاثة $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ إنها مستقلة خطياً فيما إذا لم تتحقق العلاقة :

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \alpha_3 \vec{u}_3 = \vec{0} \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$$

إلا من أجل $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ وهذا يعني أن الأشعة الثلاثة غير واقعة في مستو واحد .

ج - ونقول بصورة عامة أن جملة الأشعة $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ مستقلة خطياً فيما إذا لم تتحقق العلاقة .

$$(1) \quad \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n = \vec{0}$$

إلا من أجل $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

أما إذا تحققت العلاقة (1) من أجل قيم α_i غير معدومة برمتها ، فلنا إن هذه الأشعة مرتبطة خطياً .

مسائل وممارين محلولة

١ - النقط M و A و B و C تقع على محور مفروض . برهن صحة العلاقاتين :

$$(1) \overline{MA} \cdot \overline{BC} + \overline{MB} \cdot \overline{CA} + \overline{MC} \cdot \overline{AB} = 0$$

$$(2) \overline{MA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{MB}^2 \cdot \overline{CA} + \overline{MC}^2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} = 0$$

برهن أن العلاقة الثانية تبقى صحيحة إذا كانت M خارج المحور على أن نفهم عندئذ من \overline{MA} و \overline{MB} و \overline{MC} أطوال القطع المستقيمة التي تصل النقطه M بالنقط A و B و C من المحور .

الحل :

نختار النقطه M مبدأ للاحداثيات على المحور المفروض ونكتب وفق علاقة شال :

$$\overline{BC} + \overline{CM} + \overline{MB} = 0$$

ومنه :

$$\overline{BC} = - \overline{MB} - \overline{CM}$$

أي :

$$\overline{BC} = \overline{MC} - \overline{MB}$$

فالقياس الجبري لقطعة مستقيمة على محور موجه يساوي فاصلة (فصل) منتهى القطعة مطروحاً منه فاصلة مبدئها . فإذا استفدنا من هذه القاعدة نستطيع أن نكتب العلاقة الأولى بالشكل :

$$\overline{MA} \cdot (\overline{MC} - \overline{MB}) + \overline{MB} \cdot (\overline{MA} - \overline{MC}) + \overline{MC} \cdot (\overline{MB} - \overline{MA}) = 0$$

وبفك الأقواس والاختصار نتحقق بسهولة من صحة العلاقة .
وأما العلاقة الثانية فتأخذ الشكل :

$$\overline{MA}^2 \cdot (\overline{MC} - \overline{MB}) + \overline{MB}^2 \cdot (\overline{MA} - \overline{MC}) + \overline{MC}^2 \cdot (\overline{MB} - \overline{MA}) \\ + (\overline{MC} - \overline{MB}) \cdot (\overline{MA} - \overline{MC}) \cdot (\overline{MB} - \overline{MA}) = 0$$

وبفك الأقواس والاختصار نتحقق من صحة هذه العلاقة .
أما إذا وقعت النقطة M خارج المحور فعندئذ نفرض أن m هو مسقط النقطة M على المحور ، فيكون وفق نظرية فيثاغورث في المثلث القائم :

$$\overline{MA}^2 = \overline{Mm}^2 + \overline{mA}^2$$

$$\overline{MB}^2 = \overline{Mm}^2 + \overline{mB}^2$$

$$\overline{MC}^2 = \overline{Mm}^2 + \overline{mC}^2$$

بالعويض في (2) نجد بعد ترتيب الحدود :

$$\overline{Mm}^2 \cdot (\overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AB}) + [\overline{mA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{mB}^2 \cdot \overline{CA} + \overline{mC}^2 \cdot \overline{AB} \\ + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB}] = 0$$

إن الحد الأول معدوم لأن $\overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AB} = 0$ حسب علاقة شال :
وبما أن النقطة m واقعة على المحور فإن المقدار بين القوسين الكبيرين

معدوم استناداً إلى القسم الأول من البرهان وهو المطلوب .

٢ - A و B و C ثلاث نقط واقعة على محور ، فواصلها على الترتيب a و b و c . أوجد فصل النقطة M من هذا المحور التي تحقق العلاقة .

$$\overline{MB} \cdot \overline{MC} + \overline{MC} \cdot \overline{MA} + \overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$$

الحل :

استناداً إلى علاقة شال وبفرض أن فصل النقطة M هو x ، نكتب :

$$\overline{MB} = \overline{OB} - \overline{OM} = b - x$$

$$\overline{MC} = \overline{OC} - \overline{OM} = c - x$$

$$\overline{MA} = \overline{OA} - \overline{OM} = a - x$$

بالتعويض في العلاقة المفروضة نجد :

$$(b - x)(c - x) + (c - x)(a - x) + (a - x)(b - x) = 0$$

وبجمل الأقواس نجد :

$$3x^2 - 2(a + b + c)x + ab + bc + ca = 0$$

ويميز هذه المعادلة ، التي هي من الدرجة الثانية في x ، هو :

$$= (a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca)$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)$$

$$= \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] > 0$$

وهكذا نجد انه يوجد قيمتان لـ x تحققان المعادلة المذكورة هما :

$$x = \frac{1}{3}(a + b + c) \pm \frac{1}{3\sqrt{2}} \sqrt{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}$$

- وبالتالي يوجد على المحور ox نقطتان تحققان العلاقة المفروضة .
 ٣ - برهن أن قطري متوازي الاضلاع ABCD متناصفان .

الحل :

نختار جملة الاحداثيات على شكل تكون فيه الاحداثيات في أبسط شكل ممكن نضع مبدأ الاحداثيات O في أحد الرؤوس A ونجعل محور السينات منطبقاً على الضلع AB ومحور العيّنات عموداً عليه .

فاذا كان C الرأس المقابل لـ A وإذا افترضنا x_2 و y_2 احداثيي D ولاحظنا أن DC يوازي محور السينات وأن مسقط الشعاع \vec{OC} على المحورين يساي مجموع مسطبي \vec{OB} و \vec{OD} فعندئذ يمكننا أن نكتب .

$$A(0, 0) ; B(x_1, 0) ; D(x_2, y_2) ; C(x_1 + x_2, y_2)$$

ويكون احداثيا منتصف القطر AC هما :

$$\frac{x_1 + x_2}{2} ; \frac{0 + y_2}{2}$$

واحداثيا منتصف القطر BD :

$$\frac{x_1 + x_2}{2} ; \frac{0 + y_2}{2}$$

ومنه نلاحظ أن منتصف القطر الأول منطبق على منتصف القطر الثاني

وهو المطلوب :

ملاحظة : ليكن من الواضح ان اختيارنا الخاص بجملة الاحداثيات لا يؤثر على صومية النظرية ، وذلك لأن هذه النظرية وأمثالها من نظريات

الهندسة الابتدائية تتعلق بالاشكال الهندسية نفسها وهي مستقلة عن جملة المحاور الاحداثية التي تنسب لها الاشكال الهندسية ، ولذلك فانه من الممكن في كل نظرية أن نرسم الشكل أولاً ثم نختار المحاور بشكل ملائم .

ونريد أن نلقت النظر كذلك إلى اننا عند استعمال الطرق التحليلية في البرهان نقوم بالحل جبرياً مستخدمين احداثيات النقط ، وأما الشكل نفسه فهو لايفيدنا إلا في توضيح المسألة ، والاحداثيات وحدها هي التي تعبر عن المعطيات المفروضة في المسألة . فلو اعتبرنا في التمرين السابق احداثيي النقطة C هما x_2 و y_2 فاننا لانكون قد استفدنا من كون الشكل المفروض متوازي اضلاع . أما اعتبارنا $(x_1 + x_2, y_2)$ هما احداثيا C هو الذي جعل من الشكل متوازي أضلاع .

٤ - إذا كانت النقطة M منتصف الضلع BC من مثلث ABC فبرهن أن :

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2 \overline{AM}^2 + 2 \overline{MC}^2$$

الحل :

يمكن برهان هذه النظرية الشهيرة في الهندسة الابتدائية بشكل تحليلي على النحو التالي : نختار محور السينات منطبقاً على الضلع BC ومحور العيّنات عمودياً على هذا الضلع في النقطة M ونفرض أن فصل النقطة C هو a فعندئذ يكون فصل النقطة B هو -a أي أن :

$$C(a, 0) \quad ; \quad B(-a, 0)$$

فإذا كان (x, y) احداثيي A فعندئذ يكون استناداً إلى دستور البعد بين نقطتين :

$$\overline{AB}^2 = (x + a)^2 + y^2$$

$$\overline{AC}^2 = (x - a)^2 + y^2$$

وبجمع هاتين العلاقتين نجد :

$$(1) \quad \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2x^2 + 2a^2 + 2y^2$$

ولكن :

$$\overline{AM}^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad \overline{MC}^2 = a^2$$

اذن :

$$(2) \quad \overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 = x^2 + y^2 + a^2$$

وبمقارنة (1) مع (2) نجد المطلوب .

٥ - لدينا النقطتان A (3 , 7) و B (11 , - 1) فاذا اعتبرناهما رأسين متقابلين في مستطيل . فما هي إحداثيات مركز المستطيل .

الحل :

من المعلوم أن مركز المستطيل يقع في منتصف كل من قطريه وحيث أن AB هو قطر في المستطيل لأنه يصل بين رأسين متقابلين ، إذن تكون إحداثيات مركز المستطيل حسب (٧) هي :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3 + 11}{2} = 7$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{7 - 1}{2} = 3$$

٦ - برهن أن الرباعي الذي تقع رؤوسه في النقط (1 , 3) A ، (3 , 6) B ، (0 , 5) C ، (- 2 , 2) D هو متوازي الأضلاع .

الحل :

لنحسب أطوال اضلاع هذا الرباعي حسب دستور البعد بين نقطتين:

$$AB = \sqrt{(3-1)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$BC = \sqrt{(0-3)^2 + (5-6)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$CD = \sqrt{(-2-0)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$DA = \sqrt{(1+2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

وهذا يدلنا على أن $AB = CD$ و $BC = DA$ وهذا يكفي أن يتحقق

في رباعي حتى يكون متوازي أضلاع .

هذا ويمكن حل التمرين بشكل آخر :

لنحسب ميل أضلاع الرباعي :

ان ميل AB هو :

$$\frac{6-3}{3-1} = \frac{3}{2}$$

وميل DC هو :

$$\frac{5-2}{0-(-2)} = \frac{3}{2}$$

وميل CB هو :

$$\frac{6-5}{3-0} = \frac{1}{3}$$

وميل DA هو :

$$\frac{3-2}{1-(-2)} = \frac{1}{3}$$

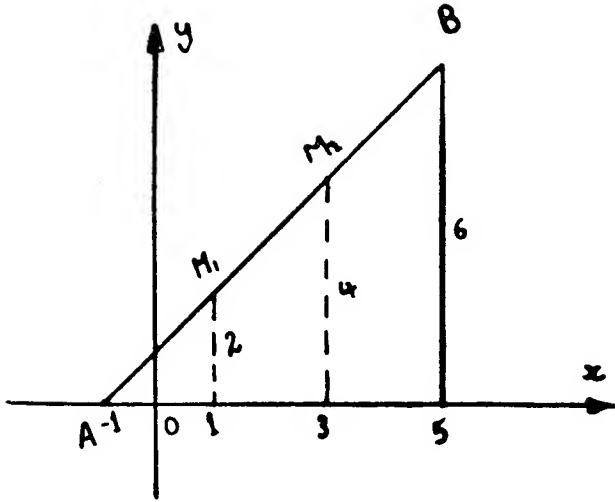
وهذا يعني أن كل ضلعين متقابلين متوازيان فالرباعي إذن هو

متوازي أضلاع .

٧ - قطعة مستقيمة AB قسمت بواسطة النقطتين $M_1 (1, 2)$

و $M_2 (3, 4)$ إلى ثلاث قطع متساوية . احسب إحداثيات النقطتين A و B .

الحل :



شكل - ٥

بما أن النقطة B تقع خارج القطعة $M_1 M_2$ وبما أن بعد النقطة B عن M_1 يساوي ضعفي بعدها عن M_2 إذن يمكن اعتبار النقطة B قاسمة للقطعة $M_1 M_2$ بالنسبة 2 . وعلى هذا تكون إحداثيات النقطة B استناداً إلى (٧) :

$$x_B = \frac{x_1 - m x_2}{1 - m} = \frac{1 - 2 \cdot 3}{1 - 2} = 5$$

$$y_B = \frac{y_1 - m y_2}{1 - m} = \frac{2 - 2 \cdot 4}{1 - 2} = 6$$

$$B = B (5, 6)$$

اذن :

وبنفس المحاكمة نرى أن النقطة A تقسم القطعة $M_1 M_2$ بالنسبة $\frac{1}{2}$ ومنه :

$$x_A = \frac{1 - \frac{1}{2} \cdot 3}{1 - \frac{1}{2}} = -1$$

$$y_A = \frac{2 - \frac{1}{2} \cdot 4}{1 - \frac{1}{2}} = 0$$

$$A = A(-1, 0) \quad \text{وبالتالي :}$$

٨ - احداثيات منتصفات اضلاع مثلث هي :

$$M_1(-2, 1) \quad M_2(2, 3) \quad M_3(4, -1)$$

احسب احداثيات رؤوس هذا المثلث :

الحل :

لنفرض أن رؤوس هذا المثلث هي A , B , C ولنفرض أن M_1 هي منتصف AB و M_2 منتصف BC و M_3 منتصف AC فعندئذ يكون لدينا :

$$\frac{x_A + x_B}{2} = -2 \quad \frac{y_A + y_B}{2} = 1$$

ومنه :

$$x_A + x_B = -4 \quad y_A + y_B = 2$$

وبنفس الطريقة نجد :

$$x_B + x_C = 4 \quad y_B + y_C = 6$$

$$x_A + x_C = 8 \quad y_A + y_C = -2$$

وبحل هذه المعادلات الست نجد :

$$A(0, -3) \quad B(-4, 5) \quad C(8, 1)$$

٩ - أوجد مركز الدائرة المارة بالنقط (0 , 0) (4 , 2) (6 , 4)

الحل :

نفرض أن احدائيي مركز الدائرة هما a, b . ولما كان مركز الدائرة يبعد بعداً ثابتاً عن النقط الواقعة على محيط الدائرة فانه يمكننا أن نكتب :

$$(a - 0)^2 + (b - 0)^2 = (a - 4)^2 + (b - 2)^2 = (a - 6)^2 + (b - 4)^2$$

ومن هاتين المعادلتين نجد :

$$0 = -8a - 4b + 20 = -12a - 8b + 52$$

وبجمل هاتين المعادلتين نجد :

$$a = -3$$

$$b = 11$$

١٠ - ماهو المنحني المستوي الذي معادلته في الاحداثيات القطبية هي :

$$r = a \cos \theta$$

الحل :

نضرب طرفي المعادلة بـ r ، بفرض أن $r \neq 0$ ، فنجد :

$$r^2 = a r \cos \theta$$

ولكن كما نعلم من (5) :

$$r \cos \theta = x$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

إذن تصبح المعادلة :

$$x^2 + y^2 = a x$$

وهذه المعادلة تمثل دائرة مارة بنقطة الاصل . ونقطة الاصل من المنحني

المفروض لأنها توافق $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، $r = 0$.

١١ - ماهي المعادلة الديكارتية للمنحنى المستوي الذي معادلته
بالاحداثيات القطبية هي :

$$r = \frac{3}{\mp 2 + 3 \sin \varphi}$$

الحل :

يمكن أن نكتب معادلة المنحنى على الشكل :

$$\mp 2 r + 3 r \sin \varphi = 3$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad r \sin \varphi = y \quad \text{ولكن}$$

اذن :

$$\mp 2 r = 3 - 3 y$$

وبتربيع الطرفين :

$$4 r^2 = (3 - 3 y)^2$$

$$4 (x^2 + y^2) = 9 + 9 y^2 - 18 y \quad \text{أو}$$

ومنه نجد المعادلة المطلوبة :

$$4 x^2 - 5 y^2 + 18 y - 9 = 0$$

١٢ - ماهي المعادلة القطبية لكل من المنحنين المستويين التاليين :

$$(x^2 + y^2)^2 = 2 a^2 x y \quad \text{ـ ب}$$

$$y^2 = \frac{x^3}{2 a - x} \quad \text{ـ ب}$$

الحل :

أ - نبدل في معادلة المنحنى x و y بما يساويها بدلالة r و φ أي :

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$

فنجد :

$$(r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi)^2 = 2 a^2 r \cos \varphi \cdot r \sin \varphi$$

ومنه :

$$r^4 = a^2 r^2 \sin^2 \varphi$$

وهنا نجد أما $r^2 = 0$ وهذه المعادلة تمثل نقطة الاصل

أو $r^2 = a^2 \sin^2 \varphi$ وهذه هي المعادلة المطاوعة وهي تمثل

منحن يمر بنقطة الأصل التي هي كذلك احدى نقط هذا المنحني :

ب - بنفس الطريقة نجد :

$$r^2 \sin^2 \varphi = \frac{(r \cos \varphi)^3}{2a - r \cos \varphi}$$

ومنه :

$$r^2 \sin^2 \varphi (2a - r \cos \varphi) - r^3 \cos^3 \varphi = 0$$

$$r^2 (2a \sin^2 \varphi - r \cos \varphi) = 0$$

وهنا نجد إما $r^2 = 0$ أو :

$$2a \sin^2 \varphi = r \cos \varphi$$

والعلاقة الاخيرة تعطينا :

$$r = 2a \sin \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

وهذه هي المعادلة المطلوبة وهي تمثل منحن يمر بنقطة الاصل .

١٣ - احسب البعد بين النقطتين $P (r_1, \varphi_1)$ و $Q (r_2, \varphi_2)$

بالاحداثيات القطبية في المستوي .

الحل :

من المعلوم أن بعد نقطتين في الاحداثيات الديكارتية ، إذا افترضنا

$P (x_1, y_1)$ و $Q (x_2, y_2)$ ، هو :

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وحيث أن :

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 \cos \varphi_1 & y_1 &= r_1 \sin \varphi_1 \\ x_2 &= r_2 \cos \varphi_2 & y_2 &= r_2 \sin \varphi_2 \end{aligned}$$

إذن :

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(r_2 \cos \varphi_2 - r_1 \cos \varphi_1)^2 + (r_2 \sin \varphi_2 - r_1 \sin \varphi_1)^2} \\ &= \sqrt{r_2^2 + r_1^2 - 2 r_1 r_2 (\cos \varphi_2 \cos \varphi_1 + \sin \varphi_2 \sin \varphi_1)} \\ &= \sqrt{r_2^2 + r_1^2 - 2 r_1 r_2 \cos (\varphi_2 - \varphi_1)} \end{aligned}$$

١٤ - احسب البعد بين نقطتين احداثياتهما القطبية هي :

$$M_1 (3, 10^\circ) \quad M_2 (5, 130^\circ)$$

الحل :

نبدل في العلاقة التي حصلنا عليها في التمرين السابق فنجد :

$$\begin{aligned} M_1 M_2 &= \sqrt{25 + 9 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cos (130 - 10)} \\ &= \sqrt{25 + 9 - 30 \cos 120^\circ} \\ &= \sqrt{49} = 7 \end{aligned}$$

١٥ - لتكن لدينا دائرة r نصف قطرها b ولتكن نقطة P واقعة على محيط الدائرة. لنمرر من P مستقيماً متحولاً D . يقطع هذا المستقيم الدائرة في نقطة متحولة Q . لنحمل على D ابتداءً من Q وإلى الجهتين المختلفتين طولاً ثابتاً قدره a . فنحصل على النقطتين M و N ماهو المحل الهندسي ل M و N .

١ - اكتب معادلة هذا المحل الهندسي بالنسبة لمجموعة محاور قطبية ، قطبها p ومحورها القطبي يمر بمركز الدائرة .

٢ - اكتب معادلة هذا المحل الهندسي بالنسبة لمجموعة محاور احداثية ديكارتية مبدؤها يقع في p والمحور ox يمر بمركز الدائرة .

الحل :

١ - من المثلث PQR نجد :

$$PQ = 2 b \cos \theta$$

إذن :

$$PN = 2 b \cos \theta - a$$

$$PM = 2 b \cos \theta + a$$

فالمعادلة القطبية للمنحنى الذي

ترسمه النقطة N هي :

$$r = 2 b \cos \theta - a$$

والمنحنى الذي ترسمه النقطة

M هي :

$$r = 2 b \cos \theta + a$$

هذا ويمكن جمع المعادلتين السابقتين بالمعادلة :

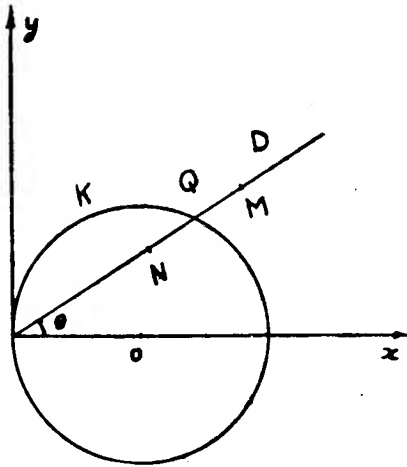
$$(r - 2 b \cos \theta)^2 = a^2$$

٢ - من اجل ايجاد المعادلة الديكارتية نلاحظ ان :

$$r^2 = x^2 + y^2 , \quad \cos^2 \theta = \frac{x^2}{r^2} = \frac{x^2}{y^2 + x^2}$$

وبالتبديل في المعادلة القطبية نجد :

$$x^2 + y^2 - 4 b x + 4 b^2 \frac{x^2}{x^2 + y^2} = a^2$$



شكل - ٦

أو :

$$a^2 (x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 - 2bx)^2$$

١٦ - احسب الاحداثيات الاسطوانية والكروية للنقطة M المعطاة

باحداثياتها الديكارتية :

$$x = 5 \quad y = 5\sqrt{3} \quad z = 10\sqrt{3}$$

الحل :

١ - الاسطوانية : إذا كانت (r, φ, z) احداثيات النقطة الاسطوانية

فعندئذ يكون لدينا :

$$r^2 = x^2 + y^2 = 25 + 75 = 100$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3}$$

$$r = 10, \varphi = \frac{\pi}{3}, z = 10\sqrt{3} \quad \text{ومنه :}$$

٢ - الكروية : إذا كانت (ρ, θ, φ) احداثيات النقطة الكروية

فعندئذ يكون لدينا :

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 25 + 75 + 300 = 400$$

$$\cos \theta = \frac{z}{\rho} = \frac{10\sqrt{3}}{20} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3}$$

$$\rho = 20 \quad ; \quad \theta = \frac{\pi}{6} \quad ; \quad \varphi = \frac{\pi}{3} \quad \text{ومنه :}$$

١٧ - اكتب المعادلة الديكارتية للسطح الممثل بالمعادلة الآتية المعطاة

بالاحداثيات الاسطوانية :

$$\mp z = r$$

الحل :

بتربيع طرفي المعادلة المقروضة نجد :

$$z^2 = r^2$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{ولكننا نعلم أن}$$

فالمعادلة المطلوبة إذن :

$$z^2 = x^2 + y^2$$

١٨ - اكتب المعادلة الديكارتية للسطح المعطى بالمعادلة الآتية في

إحداثيات الكروية (r, θ, φ) :

$$r = \mp 2 \cos \theta \cos \varphi$$

الحل :

بتربيع طرفي المعادلة نجد :

$$(1) \quad r^2 = 4 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi$$

ولكن :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 ; \quad \cos \theta = \frac{z}{r} ; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$$

ومنه نجد :

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2}$$

بالتعويض في المعادلة (2) نحصل على المعادلة :

$$(x^2 + y^2 + z^2) = 4 \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

أو :

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 (x^2 + y^2) - 4 x^2 z^2 = 0$$

وهي المعادلة المطلوبة :

١٩ - لدينا المثلث ABC حيث (*) :

$A (-3, -4, 1)$ $B (1, -2, 2)$ $C (-2, 2, -4)$
والنقطة $P (4, 3, 2)$. عين احداثيات رؤوس المثلث المناظر
لهذا المثلث بالنسبة للنقطة P .

الحل :

من الواضح أن النقطة P تقع في منتصف القطعة AA' (A' نظير A بالنسبة لـ P) ولذلك فإن :

$$\overrightarrow{PA} = - \overrightarrow{PA'}$$

بالاسقاط على محور السينات مثلاً نجد :

$$x_A - x_P = - (x_{A'} - x_P)$$

ومنه :

$$x_{A'} = 2 x_P - x_A = 8 + 3 = 11$$

بطريقة مماثلة نجد :

$$y_{A'} = 2 y_P - y_A = 6 + 4 = 10$$

$$z_{A'} = 2 z_P - z_A = 4 - 1 = 3$$

إذا أعدنا العمل بالنسبة لكل من النقطتين C' و B' نجد :

$$B' (7, 8, 2) \quad C' (10, 4, 8)$$

وهو المطلوب :

٢٠ - إذا كان :

$$\overrightarrow{OP} = \vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$$

(*) نفرض فيما يأتي ان المحاور متعامدة إلا إذا أشرنا إلى غير ذلك .

$$\overrightarrow{OQ} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

أوجد \overrightarrow{PQ} ثم احسب جيب تمام الزوايا التي يصنعها الشعاع \overrightarrow{PQ} مع المحاور الاعدائية .

الحل :

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + 11\vec{k}$$

من أجل حساب جيب تمام الزوايا التي يصنعها الشعاع \overrightarrow{PQ} مع المحاور الاعدائية نضرب أولاً الشعاع \overrightarrow{PQ} عددياً بـ \vec{i} فنجد :

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{i} = (4\vec{i} - 5\vec{j} + 11\vec{k}) \cdot \vec{i} = 4$$

ولكن من المعلوم ان :

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{i} = |\overrightarrow{PQ}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos \varphi_1 = |\overrightarrow{PQ}| \cos \varphi_1$$

حيث φ_1 الزاوية التي يصنعها \overrightarrow{PQ} مع المحور ox .

وبما أن طول الشعاع \overrightarrow{PQ} هو :

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{16 + 25 + 121} = \sqrt{162}$$

يكون :

$$\cos \varphi_1 = \frac{4}{\sqrt{162}} = \frac{4}{9\sqrt{2}}$$

نضرب ثانياً الشعاع \overrightarrow{PQ} عددياً بـ \vec{j} فنجد :

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{j} = (4\vec{i} - 5\vec{j} + 11\vec{k}) \cdot \vec{j} = -5$$

وإذا كانت φ_2 الزاوية التي يصنعها \overrightarrow{PQ} مع المحور oy فإنه

يكون :

$$\cos \varphi_3 = \frac{-5}{9\sqrt{2}}$$

وبالطريقة نفسها نجد :

$$\cos \varphi_3 = \frac{11}{9\sqrt{2}}$$

حيث φ_3 الزاوية التي يصنعها \overrightarrow{PQ} مع المحور oz .
٢١ - إذا كان :

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a} \quad , \quad \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$$

$$\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} \quad \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}$$

احسب \overrightarrow{AC} و \overrightarrow{DB} و \overrightarrow{BC} و \overrightarrow{CD} بدلالة الأشعة \overrightarrow{a} و \overrightarrow{b}

الحل :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$$

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{b} - (\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}) = -\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} - \overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} - (2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}) = -\overrightarrow{a} - 5\overrightarrow{b}$$

٢٢ - أوجد شعاع الواحدة العمودي على كل من الشعاعين :

$$\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} \quad , \quad \overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$$

الحل :

استناداً الى العبارة التحليلية للضرب الشعاعي نكتب :

$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = (1 - 4)\overrightarrow{i} + (3 + 2)\overrightarrow{j} + (8 + 3)\overrightarrow{k}$$

$$= -3\vec{i} + 5\vec{j} + 11\vec{k}$$

وطول هذا الشعاع هو .:

$$|\vec{c}| = \sqrt{9 + 25 + 121} = \sqrt{155}$$

ولكن بما ان منحى شعاع الواحدة العمودي على الشعاعين \vec{a} , \vec{b} هو نفس منحى \vec{c} ، إذن يمكن الحصول عليه بتقسيم الشعاع \vec{c} على طوله فيكون الشعاع المطلوب هو :

$$\mp \frac{1}{\sqrt{155}} (3\vec{i} + 5\vec{j} + 11\vec{k})$$

ولقد وضعنا الاشارة \mp لأنه قد تكون جهة شعاع الواحدة من جهة شعاع \vec{c} أو الجهة المعاكسة .

٢٣ - لدينا في المستوي oxy المثلث ABC حيث :

$$\vec{OA} = \vec{a} , \vec{OB} = \vec{b} , \vec{OC} = \vec{c}$$

برهن ان مساحة هذا المثلث تقاس بطول الشعاع :

$$\frac{1}{2} (\vec{b} \wedge \vec{c} + \vec{c} \wedge \vec{a} + \vec{a} \wedge \vec{b})$$

الحل :

نعلم ان سطح المثلث ABC يقاس بطول الشعاع .

$$\frac{1}{2} (\vec{AB} \wedge \vec{AC})$$

ولكن هذا الشعاع يساوي :

$$\frac{1}{2} [(\vec{OB} - \vec{OA}) \wedge (\vec{OC} - \vec{OA})]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} [(\vec{b} - \vec{a}) \wedge (\vec{c} - \vec{a})] \\
&= \frac{1}{2} [\vec{b} \wedge \vec{c} - \vec{b} \wedge \vec{a} - \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{a} \wedge \vec{a}] \\
&= \frac{1}{2} [\vec{b} \wedge \vec{c} + \vec{c} \wedge \vec{a} + \vec{a} \wedge \vec{b}] \\
&\quad \text{وذلك لأن } \vec{a} \wedge \vec{a} = 0 \text{ . وهو المطلوب :} \\
&\quad \text{٢٤ - لدينا الشعاعان :}
\end{aligned}$$

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$$

احسب سطح المثلث المنشأ على هذين الشعاعين ثم احسب الزاوية التي يصنعها هذان الشعاعان .

الحل :

نعلم ان سطح المثلث هو :

$$s = \frac{1}{2} |\vec{a} \wedge \vec{b}|$$

ولكن :

$$\begin{aligned}
\vec{a} \wedge \vec{b} &= (2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) \wedge (3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}) \\
&= 28\vec{i} - 21\vec{j} - 14\vec{k}
\end{aligned}$$

وعلى هذا :

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = \sqrt{(28)^2 + (-21)^2 + (-14)^2} = 7\sqrt{29}$$

ويكون :

$$s = \frac{1}{2} |\vec{a} \wedge \vec{b}| = \frac{7}{2} \sqrt{29}$$

ولحساب الزاوية التي يصنعها الشعاعان نلاحظ :

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \theta$$

اذن :

$$\sin \theta = \frac{|\vec{a} \wedge \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

ولكن :

$$|\vec{a}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{9 + 16 + 144} = 13$$

ومنه :

$$\sin \theta = \frac{7\sqrt{29}}{3 \cdot 13} = \frac{7\sqrt{29}}{39}$$

يلاحظ انه يمكن الوصول الى الزاوية θ التي يصنعها الشعاعان المفروضان باستعمال الجداء العددي .

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) (3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}) = 10$$

ومن جهة اخرى :

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta$$

اذن :

$$\cos \theta = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{10}{3 \cdot 13} = \frac{10}{39}$$

٢٥ - برهن أن النقط الأربع :

$$A(4, 5, 1), B(28, -1, -5), C(3, 9, 4), D(-52, 4, 4)$$

واقعة في مستو واحد .

الحل :

لنحسب مركبات الأشعة \vec{AB} و \vec{AC} و \vec{AD} .

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (28\vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k}) - (4\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k})$$

$$\vec{AB} = 24\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k} \quad \text{ومنه}$$

وبالطريقة نفسها نجد :

$$\vec{AC} = -\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{AD} = -56\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$$

وإذا وقعت النقط الأربع في مستو واحد فإن الأشعة الثلاثة

\vec{AB} , \vec{AC} , \vec{AD} تقع في المستوى نفسه . وحتى تقع الأشعة الثلاثة في

مستو واحد يلزم ان ينعدم جداولها المختلط :

$$(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = \begin{vmatrix} 24 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 3 \\ -56 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 24 \cdot 15 + 6(165) - 6(225) = 0$$

وهو المطلوب :

٢٦ - برهن المتطابقة الآتية :

$$(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})\vec{a} + (\vec{c}, \vec{a}, \vec{d})\vec{b} + (\vec{d}, \vec{a}, \vec{b})\vec{c}$$

$$- (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})\vec{d} = 0$$

الحل :

لنفرض أولاً انه توجد على الأقل ثلاثة من الأشعة المفروضة

\vec{a} و \vec{b} و \vec{c} و \vec{d} ليست موازية لمستو واحد . ولكن \vec{a} و \vec{b} و \vec{c} هذه الاشعة .

عندئذ يمكن تفريق الشعاع \vec{d} إلى ثلاث مركبات محمولة على الاشعة الثلاثة \vec{a} و \vec{b} و \vec{c} .

$$\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} \quad (1)$$

لتعيين α نضرب طرفي هذه العلاقة عددياً بـ $\vec{b} \wedge \vec{c}$ فنجد :

$$(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = \alpha (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) + \beta (\vec{b}, \vec{c}, \vec{b}) + \gamma (\vec{b}, \vec{c}, \vec{c})$$

ولكن :

$$(\vec{b}, \vec{c}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{c}) = 0$$

اذن :

$$\alpha = \frac{(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})}{(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})} = \frac{(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})}{(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})}$$

ولتعيين β نضرب طرفي العلاقة (1) عددياً بـ $\vec{c} \wedge \vec{a}$ فنجد :

$$(\vec{c}, \vec{a}, \vec{d}) = \beta (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$$

ومنه :

$$\beta = \frac{(\vec{c}, \vec{a}, \vec{d})}{(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})}$$

ولتعيين γ نضرب طرفي العلاقة (1) عددياً بـ $\vec{a} \wedge \vec{b}$ فنجد :

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) = \gamma (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

ومنه :

$$\gamma = \frac{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})} = \frac{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})}{(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})}$$

لنبدل في (1) α و β و γ بقيمها فنجد :

$$(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) \vec{d} = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) \vec{a} + (\vec{c}, \vec{a}, \vec{d}) \vec{b} + (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) \vec{c}$$

وهي العلاقة المطلوبة :

أما إذا كانت كل ثلاثة من الأشعة المفروضة واقعة في مستوى واحد فعندئذ يكون :

$$(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{d}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{d}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = 0$$

وتبقى العلاقة كذلك صحيحة .

٢٧ - برهن تحليلياً الدستور الآتي المعروف بدستور جيبس .

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

الحل :

لنفرض ان الأشعة معطاة بواسطة مركباتها على الشكل الآتي :

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$

$$\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$$

$$\vec{c} = c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k}$$

حسب عبارة الجداء الخارجي التحليلية نجد :

$$\begin{aligned}\vec{b} \wedge \vec{c} &= (b_2 c_3 - b_3 c_2) \vec{i} + (b_3 c_1 - b_1 c_3) \vec{j} \\ &+ (b_1 c_2 - b_2 c_1) \vec{k} \\ &\text{كذلك :}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) &= [a_2 (b_1 c_2 - b_2 c_1) - a_3 (b_3 c_1 - b_1 c_3)] \vec{i} \\ &+ [a_3 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_1 (b_1 c_2 - b_2 c_1)] \vec{j} \\ &+ [a_1 (b_3 c_1 - b_1 c_3) - a_2 (b_2 c_3 - b_3 c_2)] \vec{k} \\ &= [(a_2 c_2 + a_3 c_3) b_1 - (a_2 b_2 + a_3 b_3) c_1] \vec{i} \\ &+ [(a_1 c_1 + a_3 c_3) b_2 - (a_1 b_1 + a_3 b_3) c_2] \vec{j} \\ &+ [(a_1 c_1 + a_2 c_2) b_3 - (a_1 b_1 + a_2 b_2) c_3] \vec{k} \\ &= [(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) b_1 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 \\ &\quad + a_3 b_3) c_1] \vec{i} \\ &+ [(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) b_2 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) c_2] \vec{j} \\ &+ [(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) b_3 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) c_3] \vec{k} \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{c}) (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}) - (\vec{a} \cdot \vec{b}) (c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k}) \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \\ &\text{وهو المطلوب .}\end{aligned}$$

٢٨ - برهن العلاقة الآتية :

$$\begin{aligned}\vec{a} \wedge [\vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d})] &= (\vec{b} \cdot \vec{d}) (\vec{a} \wedge \vec{c}) \\ &- (\vec{b} \cdot \vec{c}) (\vec{a} \wedge \vec{d})\end{aligned}$$

الحل :

استناداً الى دستور جيبس نكتب :

$$\vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{b} \cdot \vec{d}) \vec{c} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{d}$$

وعلى هذا :

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge [\vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d})] &= \vec{a} \wedge [(\vec{b} \cdot \vec{d}) \vec{c} \\ &\quad - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{d}] = (\vec{b} \cdot \vec{d}) (\vec{a} \wedge \vec{c}) \\ &\quad - (\vec{b} \cdot \vec{c}) (\vec{a} \wedge \vec{d}) \end{aligned}$$

وهو المطلوب :

٢٩ - برهن العلاقة الآتية :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) \vec{c} - (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \vec{d}$$

الحل :

لنرمز للشعاع $\vec{a} \wedge \vec{b}$ بالرمز \vec{e} فعندئذ يكون .

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = \vec{e} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d})$$

وحسب دستور جيبس يمكن كتابة الطرف الأيمن من العلاقة

الأخيرة على الشكل :

$$(\vec{e} \cdot \vec{d}) \vec{c} - (\vec{e} \cdot \vec{c}) \vec{d}$$

ولكن :

$$(\vec{e} \cdot \vec{d}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{d} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$$

$$(\vec{e} \cdot \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

إذن :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) \vec{c} - (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \vec{d}$$

وهو المطلوب .

٣٠- برهن أن :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{b} \wedge \vec{c}, \vec{c} \wedge \vec{a}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2$$

الحل :

حسب تعريف الجداء المختلط لثلاثة أشعة نضرب الشعاع الأول في الثاني شعاعياً ثم نضرب الشعاع الحاصل بالشعاع الثالث عددياً ولكن استناداً إلى التعرین السابق يكون :

$$\begin{aligned} (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) &= (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \vec{b} \\ &- (\vec{a}, \vec{b}, \vec{b}) \vec{c} \quad (1) \end{aligned}$$

وبما أن :

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{b}) = 0$$

لأن حجم متوازي السطوح المنشأ على ثلاثة أشعة ، اثنان منها منطبقان على بعضها يساوي الصفر فلا يبقى في الطرف الأيمن من العلاقة (1) سوى الحد الأول .

إذن :

$$\begin{aligned} (\vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{b} \wedge \vec{c}, \vec{c} \wedge \vec{a}) &= (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \vec{b} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a}) \\ &= (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) (\vec{b} \cdot \vec{c} \cdot \vec{a}) \\ &= (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2 \end{aligned}$$

وهو المطلوب :

٣١ - برهن العلاقة :

$$(\vec{b} \wedge \vec{c}) (\vec{a} \wedge \vec{d}) + (\vec{c} \wedge \vec{a}) (\vec{b} \wedge \vec{d}) \\ + (\vec{a} \wedge \vec{b}) (\vec{c} \wedge \vec{d}) = 0$$

واستعملها من أجل برهان :

$$\sin (A + B) \sin (A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B$$

الحل :

لنحسب قبل كل شيء الحد الأول من العلاقة المذكورة . من أجل ذلك نوزم للشعاع $\vec{a} \wedge \vec{d}$ بالرمز \vec{e} فعندئذ يمثل الحد المذكور الجداء المختلط

$$(\vec{b}, \vec{c}, \vec{e})$$

ولكن حسب خواص الجداء المختلط يمكننا إجراء تبديل دوري بين أشعته أي :

$$(\vec{b}, \vec{c}, \vec{e}) = (\vec{c}, \vec{e}, \vec{b}) = (\vec{c} \wedge \vec{e}) \cdot \vec{b}$$

من أجل حساب $\vec{c} \wedge \vec{e}$ نبديل الشعاع \vec{e} بقيمته ونستعمل دستور

جيبس فنجد :

$$\vec{c} \wedge \vec{e} = \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{d}) = (\vec{c} \cdot \vec{d}) \vec{a} - (\vec{c} \cdot \vec{a}) \vec{d}$$

ومنه :

$$(\vec{b} \wedge \vec{c}) (\vec{a} \wedge \vec{d}) = (\vec{c} \wedge \vec{e}) \cdot \vec{b} = (\vec{c} \cdot \vec{d}) (\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ - (\vec{c} \cdot \vec{a}) (\vec{d} \cdot \vec{b})$$

بنفس الطريقة نجد :

$$(\vec{c} \wedge \vec{a})(\vec{b} \wedge \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{d} \cdot \vec{c})$$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b})(\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{b} \cdot \vec{d})(\vec{c} \cdot \vec{a}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{d} \cdot \vec{a})$$

ومنه يكون الطرف الايسر من العلاقة المفروضة مساوياً للمقدار :

$$(\vec{c} \cdot \vec{d})(\vec{a} \cdot \vec{b}) - (\vec{c} \cdot \vec{a})(\vec{d} \cdot \vec{b}) + (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

$$- (\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{d} \cdot \vec{c}) + (\vec{b} \cdot \vec{d})(\vec{c} \cdot \vec{a}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{d} \cdot \vec{a})$$

ولكن هذا المقدار الاخير يساوي الصفر وبذلك يتم الجزء الاول

من المطلوب . من اجل برهان العلاقة .

$$\sin(A + B) \sin(A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B$$

نفرض أن الأشعة الاربعة \vec{a} و \vec{b} و \vec{c} و \vec{d} واقعة في مستو

واحد ، ونفرض كذلك ان الزاوية بين \vec{a} و \vec{b} تساوي الزاوية بين

\vec{c} و \vec{d} أي :

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{c}, \vec{d}) = B$$

ولنفرض كذلك :

$$(\vec{a}, \vec{c}) = A$$

فعندئذ يكون :

$$(\vec{a}, \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{d}) = A + B$$

$$(\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) - (\vec{a}, \vec{b}) = A - B$$

$$(\vec{c}, \vec{a}) = -A$$

$$(\vec{b}, \vec{d}) = (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{d}) = A - B + B = A$$

وحسب تعريف الجداء الشعاعي تكون كل الجداءات الشعاعية الواردة في العلاقة المذكورة بنصر المسألة عمودية على المستوي الذي تقع الأشعة الأربعة وبذلك نؤول العلاقة المذكورة إلى الشكل :

$$|\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \sin (A - B) \cdot |\vec{d}| \cdot |\vec{a}| \sin (A + B)$$

$$- |\vec{c}| \cdot |\vec{a}| \sin A |\vec{b}| \cdot |\vec{d}| \sin A$$

$$+ |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin B |\vec{c}| \cdot |\vec{d}| \sin B = 0$$

وبالاختصار على $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot |\vec{d}|$ نجد :

$$\sin (A - B) \sin (A + B) = \sin^2 A - \sin^2 B$$

وهو المطلوب .

٣٢ - إذا كان لدينا عدة نقط في الفراغ A_1, A_2, \dots, A_n

وإذا حققنا بهذه النقط الأعداد الجبرية k_1, k_2, \dots, k_n (مثال ذلك

الحالة التي تكون فيها النقط المذكورة نقطاً مادية والأعداد الملحقه بها

كتل هذه النقط) فعندئذ توجد نقطة وحيدة G تسمى مركز النقط

(مركز الكتل) تحقق العلاقة الشعاعية :

$$(1) \quad (k_1 + k_2 + \dots + k_n) \vec{OG} = k_1 \vec{OA_1} + k_2 \vec{OA_2} + \dots + k_n \vec{OA_n}$$

وذلك بفرض أن $\sum k_i = k_1 + k_2 + \dots + k_n \neq 0$ وان O نقطة

ما من الفراغ . يبرهن أن النقطة G لاتتأثر إذا غيرنا موضع النقطة O .

أما اذا كان $\sum k_i = 0$ فعندئذ تكون النقطة G غير معينة ويمثل

الشعاع في الطرف الأيمن من العلاقة شعاعاً ثابتاً عندما تتحول النقطة O.

والمطلوب فيما يلي حل المسألة التالية :

لتكن لدينا النقط A, B, C في الفراغ المنسوب إلى جملة محاور
احداثية قائمة $oxyz$:

$$A(a, 0, 0) ; B(0, b, 0) ; C(0, 0, c)$$

عين المركز I للنقط A, B, C, O إذا الحقنا بها الأعداد
 $1, 1, 1, -1$ على الترتيب :

ثم برهن أن $\vec{OI} = \frac{3}{2} \vec{OG}$ بفرض أن G مركز ثقل المثلث ABC

الحل :

اعتماداً على العلاقة (1) نجد :

$$(1 + 1 + 1 - 1) \vec{OI} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} - \vec{OO}$$

أو :

$$(2) \quad 2 \vec{OI} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$$

وبالاسقاط نجد (بفرض أن x, y, z احداثيات النقطة I) :

$$x = \frac{a}{2} ; y = \frac{b}{2} ; z = \frac{c}{2}$$

وبما أن مركز ثقل المثلث ، كما هو معلوم من أبحاث الميكانيك ،
هو مركز رؤوس هذا المثلث عندما نلحق بها كتلاً متساوية ، فاننا
نجد (اذا كانت الكتلة في كل رأس تساوي k) .

$$3k \vec{OG} = k \vec{OA} + k \vec{OB} + k \vec{OC}$$

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3 \vec{OG} \quad \text{أو :}$$

بالتعويض في العلاقة (2) نجد المطلوب .

٣٣ - (١) لدينا ثلاث نقط A و B و C وثلاثة أعداد موجبة a و b و c

مجموعها s برهن أن النقطة G حيث :

$$(1) \quad \vec{OG} = \frac{1}{s} (a \vec{OA} + b \vec{OB} + c \vec{OC})$$

تحقق الخاصة التالية : مساحات المثلثات GBC , GCA , GAB تتناسب

مع الأعداد a , b , c علماً بأن النقطة O هي نقطة ما من الفراغ .

(٢) بين أن H ، نقطة تقاطع الارتفاعات في مثلث ، تحقق العلاقة :

$$(2) \quad \vec{OH} = \frac{1}{s'} [(\operatorname{tg} A) \vec{OA} + (\operatorname{tg} B) \vec{OB} + (\operatorname{tg} C) \vec{OC}]$$

$$\text{حيث } s' = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C$$

(٣) بين أن المركز ω للدائرة المارة من رؤوس المثلث تحقق العلاقة :

$$(3) \quad \vec{O\omega} = \frac{1}{s''} [(\sin 2 A) \vec{OA} + (\sin 2 B) \vec{OB} + (\sin 2 C) \vec{OC}]$$

$$\text{حيث } s'' = \sin 2 A + \sin 2 B + \sin 2 C$$

(٤) بين أن المركز I للدائرة الماسة داخلياً لأضلاع المثلث تحقق العلاقة :

$$(4) \quad \vec{OI} = \frac{2}{s'''} [a \vec{OA} + b \vec{OB} + c \vec{OC}]$$

حيث a و b و c أطوال أضلاع المثلث و $s''' = a + b + c$.

الحل :

(١) نختار النقطة O في العلاقة (١) منطبقة على G فعندئذ نجد :

$$(5) \quad a \vec{GA} + b \vec{GB} + c \vec{GC} = \vec{O}$$

نضرب هذه العلاقة شعاعياً بالشعاع \vec{GA} فنجد :

$$(a \vec{GA} + b \vec{GB} + c \vec{GC}) \wedge \vec{GA} = \vec{0} \wedge \vec{GA} = \vec{0}$$

ومنه ، حسب خواص الجداء الشعاعي ، نجد :

$$b (\vec{GB} \wedge \vec{GA}) + c (\vec{GC} \wedge \vec{GA}) = 0$$

وبما أن طول الجداء الشعاعي لشعاعين يقدر بضعف مساحة المثلث المنشأ على الشعاعين وإذا رمزنا لمساحات المثلثات GAC , GCA , GAB بـ s_1 , s_2 , s_3 على الترتيب نجد :

$$b s_3 = c s_2$$

ومنه :

$$\frac{s_1}{b} = \frac{s_3}{c}$$

وإذا ضربنا بعد ذلك (5) شعاعياً بـ \vec{GB} نجد بطريقة مماثلة :

$$\frac{s_3}{c} = \frac{s_1}{a}$$

$$\frac{s_1}{a} = \frac{s_2}{b} = \frac{s_3}{c} \quad \text{ومنه :}$$

وهو المطلوب الأول .

هذا ويمكن للقارئ أن يبرهن العكس بسهولة وهو انه إذا تناسبت مساحات المثلثات المذكورة مع الأعداد a و b و c فعندئذ تتحقق المعادلة (1) .

٢ - لبرهان الجزء الثاني من المسألة يكفي ان نبرهن أن مساحات

المثلثات HBC , HCA , HAB تتناسب مع $\text{tg } A$, $\text{tg } B$, $\text{tg } C$ على الترتيب :

يمكننا أن نبرهن بسهولة أن الزوايا BHC , CHA , AHB تساوي

الزوايا $B + C$, $C + A$, $A + B$ على الترتيب ولذلك فإن مساحات المثلثات المذكورة هي :

$$s_1 = \frac{1}{2} HB \cdot HC \sin A ; s_2 = \frac{1}{2} HC \cdot HA \sin B ;$$

$$s_3 = \frac{1}{2} HA \cdot HB \sin C$$

ولكن :

$$HB \cos A = HA \cos B ; HC \cos B = HB \cos C$$

اذن :

$$\frac{s_1}{\sin A} = \frac{s_2}{\sin B} = \frac{s_3}{\sin C}$$

وهو المطلوب الثاني .

٣ - بما أن الزاوية المركزية في الدائرة تساوي ضعف الزاوية المحيطية التي تحد القوس نفسه فإن مساحات المثلثات ωBC , ωCA , ωAB هي (بفرض أن r نصف قطر الدائرة) :

$$\frac{1}{2} r^2 \sin 2 A , \quad \frac{1}{2} r^2 \sin 2 B , \quad \frac{1}{2} r^2 \sin 2 C$$

فهي تتناسب إذن مع $\sin 2 A$, $\sin 2 B$, $\sin 2 C$ وهو المطلوب .

٤ - نترك البرهان للقارئ لسهولة .

٣٤ - A و B و C و D اربع نقط كيفية . برهن العلاقة :

$$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}$$

الحل :

نلاحظ أن جميع الأشعة الواردة في الطرف الأيمن من العلاقة

تبدأ بـ A ، لذلك نكتب :

$$\vec{BC} \wedge \vec{BD} = (\vec{AC} - \vec{AB}) \wedge (\vec{AD} - \vec{AB})$$

وحسب خواص الجداء الهندسي يكون :

$$\begin{aligned}\vec{BC} \wedge \vec{BD} &= \vec{AC} \wedge \vec{AD} - \vec{AC} \wedge \vec{AB} - \vec{AB} \wedge \vec{AD} + \vec{AB} \wedge \vec{AB} \\ &= \vec{AB} \wedge \vec{AC} + \vec{AC} \wedge \vec{AD} + \vec{AD} \wedge \vec{AB}\end{aligned}$$

وهي العلاقة المطلوبة .

نلاحظ أن الطرف الأيسر من العلاقة مستقل عن A ويتعلق فقط بمواضع النقط الثلاث .

٣٥ - A و B و C و D أربع نقط كيفية . برهن العلاقة :

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{BC} = 0$$

ماذا نستنتج من هذه العلاقة عندما ينعدم حدان منها .

الحل :

إن الطرف الأيسر من العلاقة المفروضة يكتب بالشكل :

$$\vec{AB} \cdot (\vec{AD} - \vec{AC}) + \vec{AC} \cdot (\vec{AB} - \vec{AD}) + \vec{AD} \cdot (\vec{AC} - \vec{AB})$$

وبفك الأقواس نلاحظ أن المقدار الأخير يساوي الصفر .

وانعدام حدين من العلاقة المفروضة يجر معه انعدام الحد الثالث ، وهذا يعني (إذا لاحظنا أن الأشعة الواردة في العلاقة محمولة على أحرف رباعي وجوه ABCD في الحالة التي لاتقع فيها النقط الأربع في مستو واحد) انه إذا تعامد الضلعان في كل من زوجين اثنين من الاضلاع

المتقابلة في رباعي وجوه فعندئذ يتعامد ضلعا الزوج الثالث .

أما إذا وقعت النقط الأربع في مستو واحد ولم تقع النقط الثلاث A و B و C على استقامة واحدة فعندئذ نستنتج من انعدام الحدين الأول والثاني ان النقطة D هي نقطة تلاقي الارتفاعين في المثلث ABC المتعلقين بالنقطتين B و C . وانعدام الحد الثالث يعني ان الارتفاع الثالث النازل من النقطة A على الضلع BC يمر من النقطة D ، فارتفاعات المثلث تتلاقى اذن بنقطة واحدة

٣٦- لدينا \vec{A} و \vec{B} و \vec{C} ثلاثة أشعة . احسب كلاً من الجداءين :

$$(1) \quad P = (\vec{B} + \vec{C}, \vec{C} + \vec{A}, \vec{A} + \vec{B})$$

$$(2) \quad Q = ((\vec{A} + \vec{B}) \wedge (\vec{A} + \vec{C}), (\vec{B} + \vec{C}) \wedge (\vec{B} + \vec{A}), (\vec{C} + \vec{A}) \wedge (\vec{C} + \vec{B}))$$

$$H = (\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) \text{ المختلط بدلالة الجداء المختلط}$$

الحل :

١ - يمكن ، استناداً إلى خواص الجداء المختلط كتابة الجداء

الأول بالشكل التالي :

$$\begin{aligned} P = & (\vec{B}, \vec{C}, \vec{A}) + (\vec{B}, \vec{C}, \vec{B}) + (\vec{B}, \vec{A}, \vec{A}) + (\vec{B}, \vec{A}, \vec{B}) \\ & + (\vec{C}, \vec{C}, \vec{A}) + (\vec{C}, \vec{C}, \vec{B}) + (\vec{C}, \vec{A}, \vec{A}) + (\vec{C}, \vec{A}, \vec{B}) \end{aligned}$$

وجميع الجداءات المختلطة في العلاقة الأخيرة ، باستثناء الأول والأخير،

معدومة لتطابق شعاعين في كل منها . وإذا أجرينا تبديلاً دورياً
مناسباً في أشعة الجداءين الأول والأخير نجد أن كلا منها يساوي
H ، أي :

$$P = 2 H$$

٢ - لبرهان العلاقة الثانية نستفيد من تعريف الجداء المختلط
فتكتب :

$$Q = [(\vec{A} + \vec{B}) \wedge (\vec{A} + \vec{C}) \wedge (\vec{B} + \vec{C}) \wedge (\vec{B} + \vec{A})] \cdot \\ (\vec{C} + \vec{A} \wedge \vec{C} + \vec{B})$$

ولكننا نعلم من التمرين (٢٩) أن :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) \vec{c} - (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \vec{d}$$

لذلك :

$$(\vec{A} + \vec{B}) \wedge (\vec{A} + \vec{C}) \wedge (\vec{B} + \vec{C}) \wedge (\vec{B} + \vec{A}) \\ = (\vec{A} + \vec{B}, \vec{A} + \vec{C}, \vec{B} + \vec{A}) (\vec{B} + \vec{C}) - \\ (\vec{A} + \vec{B}, \vec{A} + \vec{C}, \vec{B} + \vec{C}) (\vec{B} + \vec{A})$$

والحد الأول معدوم لتطابق شعاعين في الجداء المختلط الوارد فيه في
حين يمكن كتابة الحد الثاني اعتماداً على (١) بالشكل :

$$(\vec{A} + \vec{B}, \vec{B} + \vec{C}, \vec{C} + \vec{A}) (\vec{B} + \vec{A}) = 2 H (\vec{B} + \vec{A})$$

وبذلك يكون :

$$Q = 2 H (\vec{B} + \vec{A}) \cdot (\vec{C} + \vec{A} \wedge \vec{C} + \vec{B}) \\ = 2 H (\vec{B} + \vec{A}, \vec{C} + \vec{A}, \vec{C} + \vec{B}) = - 4 H^2$$

٣٧ - برهن العلاقة :

$$(1) \quad (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})(\vec{p} \wedge \vec{q}) = \begin{vmatrix} \vec{p} \cdot \vec{a} & \vec{q} \cdot \vec{a} & \vec{a} \\ \vec{p} \cdot \vec{b} & \vec{q} \cdot \vec{b} & \vec{b} \\ \vec{p} \cdot \vec{c} & \vec{q} \cdot \vec{c} & \vec{c} \end{vmatrix}$$

استخدم هذا الشكل لتحصل على الجداء .

$$(2) \quad (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$$

ثم استخلص قاعدة ضرب معينين من المرتبة الثالثة .

الحل :

نشر المعين وفق عناصر العمود الأول فنجد :

$$\begin{aligned} & (\vec{p} \cdot \vec{a}) [(\vec{q} \cdot \vec{b}) \vec{c} - (\vec{q} \cdot \vec{c}) \vec{b}] \\ & + (\vec{p} \cdot \vec{b}) [(\vec{q} \cdot \vec{c}) \vec{a} - (\vec{q} \cdot \vec{a}) \vec{c}] \\ & + (\vec{p} \cdot \vec{c}) [(\vec{q} \cdot \vec{a}) \vec{b} - (\vec{q} \cdot \vec{b}) \vec{a}] \end{aligned}$$

واستناداً إلى دستور جيبس يمكن كتابة العبارة الأخيرة بالشكل :

$$\begin{aligned} & (\vec{p} \cdot \vec{a}) [\vec{q} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{b})] + (\vec{p} \cdot \vec{b}) [\vec{q} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{c})] \\ & + (\vec{p} \cdot \vec{c}) [\vec{q} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{a})] \\ & = [(\vec{p} \cdot \vec{a})(\vec{b} \wedge \vec{c}) + (\vec{p} \cdot \vec{b})(\vec{c} \wedge \vec{a}) + (\vec{p} \cdot \vec{c})(\vec{a} \wedge \vec{b})] \wedge \vec{q} \\ & = \{[(\vec{p} \cdot \vec{a}) \vec{b} - (\vec{p} \cdot \vec{b}) \vec{a}] \wedge \vec{c} + (\vec{p} \cdot \vec{c})(\vec{a} \wedge \vec{b})\} \wedge \vec{q} \end{aligned}$$

وبالاستفادة من دستور جيبس ثانية نجد أن :

$$(\vec{p} \cdot \vec{a}) \vec{b} - (\vec{p} \cdot \vec{b}) \vec{a} = \vec{p} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{a})$$

وبالتالي تصبح قيمة المعين :

$$\{ [\vec{p} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{a})] \wedge \vec{c} + (\vec{p} \cdot \vec{c}) (\vec{a} \wedge \vec{b}) \} \wedge \vec{q}$$

وبنشر الحد الأول من المقدار ضمن القوسين الكبيرين في الطرف الأيسر وفق دستور جيبس والاختصار نجد :

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \vec{p} \wedge \vec{q} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) (\vec{p} \wedge \vec{q})$$

وهو المطلوب .

للحصول على الجداء (2) يكفي ان نضرب طرفي (1) داخلياً بـ \vec{r} بعد أن

ننشر المعين في الطرف الثاني وفق عناصر العمود الثالث فنجد :

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) (\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{p} \cdot \vec{a} & \vec{q} \cdot \vec{a} & \vec{r} \cdot \vec{a} \\ \vec{p} \cdot \vec{b} & \vec{q} \cdot \vec{b} & \vec{r} \cdot \vec{b} \\ \vec{p} \cdot \vec{c} & \vec{q} \cdot \vec{c} & \vec{r} \cdot \vec{c} \end{vmatrix}$$

ومن هذه العبارة نستخلص القاعدة الشهيرة لضرب معينين من المرتبة

الثالثة .

٣٨- لتكن \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} ثلاثة أشعة واحدة كيفية لا توازي مستوياً

واحداً ، وتضع فيما بينها الزوايا α و β و γ (كل زاوية من هذه الزوايا

أكبر من الصفر وأصغر من π) :

١ - احسب مركبات الأشعة :

$$\vec{u} = \vec{j} \wedge \vec{k} ; \vec{v} = \vec{k} \wedge \vec{i} , \vec{w} = \vec{i} \wedge \vec{j}$$

في هذه الجملة المائلة $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ بدلالة α و β و γ .

٢ - احسب في الجملة المذكورة مركبات الجداء :

$$(X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}) \wedge (X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k})$$

٣ - برهن :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})^2$$

الحل :

١ - استناداً إلى التمرين (٢٦) يمكننا أن نكتب :

$$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\vec{u} = (\vec{u}, \vec{j}, \vec{k})\vec{i} + (\vec{u}, \vec{k}, \vec{i})\vec{j} + (\vec{u}, \vec{i}, \vec{j})\vec{k}$$

ولكن :

$$\begin{aligned} (\vec{u}, \vec{j}, \vec{k}) &= ((\vec{j} \wedge \vec{k}) \wedge \vec{j}) \cdot \vec{k} = (\vec{j} \cdot \vec{j}) (\vec{k} \cdot \vec{k}) \\ &- (\vec{j} \cdot \vec{k})(\vec{j} \cdot \vec{k}) = 1 - \cos^2 \beta \end{aligned}$$

كذلك :

$$(\vec{u}, \vec{k}, \vec{i}) = \cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha$$

$$(\vec{u}, \vec{i}, \vec{j}) = \cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma$$

وهكذا نجد :

$$\begin{aligned} (1) \quad (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\vec{u} &= (1 - \cos^2 \beta)\vec{i} + (\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha)\vec{j} \\ &+ (\cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma)\vec{k} \end{aligned}$$

وبطريقة مماثلة نجد :

$$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \vec{v} = (\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha) \vec{i} + (1 - \cos^2 \gamma) \vec{j} \\ + (\cos \gamma \cos \alpha - \cos \beta) \vec{k}$$

$$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \vec{w} = (\cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma) \vec{i} + (\cos \gamma \cos \alpha \\ - \cos \beta) \vec{j} + (1 - \cos^2 \alpha) \vec{k}$$

يبقى أن نعين قيمة الجداء المختلط $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لنحصل على المطلوب الأول . نضرب ، من أجل ذلك ، العلاقة (١) داخلياً بـ \vec{i} فنجد :

$$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})^2 = (1 - \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha - \cos^2 \gamma) + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$$

٢ - إن الجداء المطلوب يساوي :

$$(Y Z' - Z Y') \vec{u} + (Z X' - X Z') \vec{v} + (X Y' - Y X') \vec{w}$$

٣ - نلاحظ أن :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (\vec{j} \wedge \vec{k}) \wedge (\vec{k} \wedge \vec{i})$$

واستناداً إل التمرين (٢٩) نجد :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (\vec{j}, \vec{k}, \vec{i}) \vec{k} - (\vec{j}, \vec{k}, \vec{k}) \vec{i} \\ (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \vec{k}$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \vec{k} \cdot (\vec{i} \wedge \vec{j}) \\ = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})^2$$

وهو المطلوب .

٣٩ - لتكن لدينا الثلاثية Oxyz والكرة التي مركزها O ونصف قطرها واحدة الطول ولنفرض أن هذه الكرة تقطع أحرف الثلاثية

في A و B و C على الترتيب .

لنرسم المستوي P العمودي في O على OA ولنفرض أن هذا المستوي يقطع المستويين OAB و OBC وفق نصفي المستقيمين OB' و OC' (B' و C' على الكرة المفروضة) . فإذا فرضنا A هي الزاوية المستوية للثنائية OA و a و b و c أوجه الثلاثة المفروضة والمطلوب :

١ - اثبات أن :

$$\vec{OB} \cdot \vec{OC} = \cos b \cdot \cos c + \sin b \sin c \cdot \vec{OB}' \cdot \vec{OC}'$$

٢ - استنتاج الدستور الأساسي للمثلثات الكروية :

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

الحل :

١ - من الواضح أن \vec{OB} يقع في المستوي المعين بـ OA و OB' وأن OA عمودي على OB' .

وبما أن الزاوية AOB تساوي c نجد :

$$\vec{OA} = \cos c \cdot \vec{OB} + \sin c \cdot \vec{OB}'$$

بطريقة مماثلة :

$$\vec{OC} = \cos b \cdot \vec{OA} + \sin b \cdot \vec{OC}'$$

وبضرب العلاقتين الأخيرتين عددياً ، طرفاً بطرف ، نجد :

$$(1) \quad \vec{OB} \cdot \vec{OC} = \cos c \cdot \cos b + \sin c \cdot \sin b \cdot \vec{OB}' \cdot \vec{OC}'$$

٢ - بما أن :

$$\vec{OB} \cdot \vec{OC} = \cos a$$

وأن الزاوية بين OB' و OC' تساوي الزاوية A فعندئذ يكون :

$$\vec{OB'} \cdot \vec{OC'} = \cos A$$

بالتعويض في (1) نحصل على المطلوب :

٤٠ - برهن أن الأشعة :

$$\vec{a} (1, 2, 3) ; \vec{b} (0, 1, 2) ; \vec{c} (0, 0, -1)$$

مستقلة خطياً .

الحل :

كي تكون الأشعة المفروضة مستقلة خطياً يجب أن لاتصح العلاقة :

$$(1) \quad \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = 0$$

إلا من أجل $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

لنسقط العلاقة (1) على المحاور الاحداثية فنحصل على جملة المعادلات :

$$\alpha = 0 ; \quad 2\alpha + \beta = 0 ; \quad 3\alpha + 2\beta - \gamma = 0$$

وهذه الجملة من المعادلات لاتقبل سوى الحل $\alpha = \beta = \gamma = 0$

ي هو المطلوب .

٤١ - برهن أن الأشعة :

$$\vec{a} (1, 2, -1) ; \vec{b} (3, 2, 4) ; \vec{c} (5, 6, 2)$$

مرتبطة خطياً :

الحل :

لنسقط العلاقة :

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = 0$$

على المحاور الاحداثية فنحصل على جملة المعادلات :

$$\alpha + 3\beta + 5\gamma = 0$$

$$2\alpha + 2\beta + 6\gamma = 0$$

$$-\alpha + 4\beta + 2\gamma = 0$$

من هذه المعادلات نجد .

$$\alpha = -2\gamma \quad \beta = -\gamma \quad \gamma = \gamma$$

وهذا يعني أن جملة المعادلات السابقة تقبل عدداً غير منته من المحلول،

فلو وضعنا $\gamma = 1$ لحصلنا على الحل .

$$\alpha = -2 ; \quad \beta = -1 ; \quad \gamma = 1$$

والجملة مرتبطة خطياً وهو المطلوب .

مسائل وتمارين غير محلولة

٤٢ - لدينا النقط $M_1(1, 1)$ و $M_2(2, 2)$ و $M_3(3, -1)$ فاذا فرضنا أن هذه النقط تشكل ثلاثة رؤوس متتالية في متوازي اضلاع فما هما احداثيا الرأس الرابع .

٤٣ - لدينا $A(2, 3)$ و $B(7, -2)$ لنأخذ على امتداد BA نقطة تبعد عن A بمقدار القطعة AB . المطلوب إيجاد احداثيات هذه النقطة :

٤٤ - إذا كان $A(2, 3)$ و $B(6, 6)$ رأسين متتالين في مربع عين الرأسين الباقيين A' و B' .

٤٥ - اكتب معادلة الدائرة في الاحداثيات القطبية إذا علمت أنها تمر بالقطب وأن احداثي مركزها القطبيين هما (r_1, θ_1) .

٤٦ - ليكن لدينا مستقيماً g ونقطة P تبعد عنه المسافة $b \neq 0$. لنمر من P مستقيماً متحولاً D يقطع g في نقطة مثل m . لنحمل على D وابتداءً من m وإلى الجهتين المختلفتين الطول a فنحصل على النقطتين M_1 و M_2 أي $M_2 = a$ أي $m M_1 = m M_2 = a$ ما هو المحل الهندسي للنقطتين M_1 و M_2 .

١ - بواسطة الاحداثيات القطبية . حيث نتخذ P قطباً والمحور العمودي على g محوراً قطبياً .

٢ - بواسطة الاحداثيات الديكارتية التي نأخذها بحيث ينطبق oy على g ويمر المحور ox في P .

٤٧ - أوجد احداثيات النقطة M التي تقسم القطعة $P_1 P_2$ بالنسبة $k = 5/3$ مع العلم أن $P_1 (-5, 2)$ و $P_2 (1, 4)$

٤٨ - النقطة $(9, 2)$ تقسم القطعة $P_1 P_2$ بالنسبة $k = -3/7$ أوجد احداثي النقطة P_2 إذا علمت أن $P_1 (6, 8)$.

٤٩ - أوجد الاحداثيات الكروية والاسطوانية للنقطة .

$$A \left(\frac{5\sqrt{2}}{4}, \frac{5\sqrt{6}}{4}, \frac{5\sqrt{2}}{2} \right)$$

٥٠ - إذا علمت أن معادلة الكرة في الاحداثيات الديكارتية هي :

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

فما هي معادلتها في الاحداثيات الاسطوانية والكروية .

٥١ - ماهي المعادلة الديكارتية لكل من المنحنيين التاليين الممثلين في الاحداثيات الكروية .

$$R \cos \theta = \cos \varphi \quad - \text{أ}$$

$$\varphi = R \sin \theta \quad - \text{ب}$$

برهن النظريات التالية تحليلياً .

٥٢ برهن أن قطري شبه المنحرف المتساوي الساقين متساويان .

(ارشاد : يمكن اختيار المحاور الاحداثية على شكل تكون فيه

احداثيات رؤوس شبه المنحرف هي : $(a, 0)$; (b, c) ; $(a - b, c)$; $((0, 0))$.

٥٣ - برهن أن القاعدة الوسطى في شبه المنحرف تساوي نصف مجموع قاعدتيه .

٥٤ - برهن انه إذا تساوى مستقيمان متوسطان في مثلث فهو متساوي الساقين .

٥٥ - برهن ان مربع أي ضلع في مثلث مقابل لزاوية حادة يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين مطروحاً منه ضعف جداء أحد هذين الضلعين في مسقط الآخر عليه .

٥٦ - في المثلث ABC تقع النقطة D على AB والنقطة E على AC على شكل يكون فيه $AD = 2 DB$ و $CE = 2 EA$. برهن أنه إذا كانت F نقطة تقاطع BE مع CD فإن :

$$\frac{BF}{FE} = \frac{3}{4} \quad ; \quad \frac{DE}{FC} = \frac{1}{6}$$

٥٧ - احسب الزاوية المحصورة بين الشعاعين :

$$\vec{b} = (-\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$$

$$\vec{c} = (2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$$

٥٨ - احسب جيب تمام الزوايا التي يصنعها الشعاع .

$$\vec{d} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

مع المحاور الاحداثية .

٥٩ - إذا كان :

$$\vec{a}(2, -1, 1); \vec{b}(0, 1, 3); \vec{c}(-2, 1, 6)$$

فاوجد الشعاع \vec{d} العمودي على كل من \vec{b} و \vec{c} والذي يحقق الشرط

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = :$$

٦٠ - احسب العدد h لتقع الأشعة الثلاثة :

$$\vec{a} = 3\vec{i} + h\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{b} = -\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{c} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}$$

في مستو واحد .

٦١ - احسب العددين y و z على شكل يتعامد فيه الشعاع .

$$\vec{a} = 2\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{b} = -\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{c} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$$

مع الشعاعين

٦٢ - احسب حجم متوازي السطوح المنشأ على الأشعة .

$$\vec{OA} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{OB} = 2\vec{i} + 6\vec{k}$$

$$\vec{OC} = 3\vec{i} + \vec{j}$$

٦٣ - ليكن لدينا المثلث ABC حيث $A(5, 1)$ و $B(-2, 2)$ وأما C فتقع على محور السينات . احسب فاصلة C كي يكون سطح المثلث مساوياً 10 .

٦٤ - ليكن لدينا الأشعة .

$$\vec{a} = \vec{i} + 5\vec{j}$$

$$\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

احسب مساقط الأشعة \vec{a} و \vec{b} و $\vec{a} + \vec{b}$ على الشعاع \vec{v} وتحقق

من ان مجموع مسقطي \vec{a} و \vec{b} يساوي مسقط $\vec{a} + \vec{b}$

٦٥ - أوجد شعاعي الواحدة المتعامدين اللذين يميلان على oz الميل ذاته

$$\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

٦٦ - برهن العلاقة :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{c} \wedge \vec{d}, \vec{e} \wedge \vec{p})$$

$$= (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})(\vec{c}, \vec{e}, \vec{p}) - (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})(\vec{d}, \vec{e}, \vec{p})$$

$$+ (\vec{a}, \vec{b}, \vec{e})(\vec{p}, \vec{c}, \vec{d}) - (\vec{a}, \vec{b}, \vec{p})(\vec{e}, \vec{c}, \vec{d})$$

$$+ (\vec{c}, \vec{d}, \vec{a})(\vec{b}, \vec{e}, \vec{p}) - (\vec{c}, \vec{d}, \vec{b})(\vec{a}, \vec{e}, \vec{p})$$

الهندسة التحليلية م-٥ - ٦٥ -

٦٧ - برهن أن حجم الهرم ABCD حيث :

$$\vec{OA} = \vec{a}; \vec{OB} = \vec{b}; \vec{OC} = \vec{c}; \vec{OD} = \vec{d}$$

يعطى بالعبارة :

$$\frac{1}{6} [(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) - (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) + (\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) - (\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})]$$

٦٨ - إذا كان :

$$\vec{a} = (1, -2, 3); \vec{b} = (2, -1, -1); \vec{c} = (0, 1, 1)$$

فاحسب :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \quad (١)$$

$$\vec{b} \wedge \vec{a} \quad (٢)$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \quad (٣)$$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) \quad (٤)$$

الاجوبة

$$(2, -2) \quad -٤٢$$

$$(-3, 8) \quad -٤٣$$

$$B'(9, 2) \text{ و } A'(5, -1) \quad -٤٤$$

$$B'(3, 10) \text{ و } A'(-1, 7) \text{ أو}$$

$$r = 2r_1 \cos(\theta - \theta_1) \quad -٤٥$$

$$r = \frac{b}{\cos \theta} \mp a \quad -٤٦$$

$$(x^2 - a^2)(b + x)^2 + x^2 y^2 = 0$$

$$(10, 7) \quad - 1 \vee$$

$$(16, -12) \quad - 1 \wedge$$

$$\varrho = 5 ; \quad \Theta = 45^\circ ; \quad \varphi = 60^\circ \quad - 1 \vee$$

$$r = \frac{5\sqrt{2}}{2} ; \quad \varphi = 60^\circ ; \quad z = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\varrho^2 = a^2 \quad - 0 \cdot$$

$$r^2 + z^2 = a^2$$

$$z^2 = \frac{x^2}{y^2 + x^2} \quad - 1 \quad - 0 \vee$$

$$y = x \operatorname{tg} \sqrt{x^2 + y^2} \quad - \varphi$$

$$\frac{\pi}{2} - 0 \vee$$

$$\cos \omega_1 = \frac{2}{3} ; \quad \cos \omega_2 = \frac{2}{3} ; \quad \cos \omega_3 = -\frac{1}{3} \quad - 0 \wedge$$

$$(-2, -3, 1) - 0 \vee$$

$$h = -6, 8 - 1 \cdot$$

$$y = -1, \dots z = 3 - 1 \vee$$

$$60 - 1 \vee$$

$$(-8, 32) - 1 \vee$$

$$(4, 2, 6) - 1 \vee$$

$$(1+h)\vec{i} + (1-2h)\vec{j} + (-2+h)\vec{k} - 1 \cdot$$

$$(1-2h)\vec{i} + (1+h)\vec{j} + (-2+h)\vec{k}$$

حيث h جذر المعادلة :

$$h^2 + 2h - 2 = 0$$

$$(5, 7, 3) - 1 - 68$$

$$(-5, -7, -3) - 2$$

$$10 - 3$$

$$(2, -2, -2) - 4$$

★ ★ ★

الفصل الثاني

المنامي ونقل المحاور الاصلية

١ - المناحي :

١ - منحنى المستقيم هو أي مستقيم يوازيه ، والمنحنى الموجه لمحور مفروض هو أي محور يوازيه ويتحد معه بالاتجاه .

ويتعين منحنى مستقيم بشعاع ما \vec{V} يوازيه أوجمركات هذا الشعاع (a, b, c) على المحاور الاحداثية ، نسمي هذه المركبات الأمثال الموجهة للمستقيم . وإذا كانت (a, b, c) الأمثال الموجهة لمستقيم . وكان k عدداً جبرياً كيفياً غير مساو للصفر فإن (ka, kb, kc) تكون كذلك الأمثال الموجهة للمستقيم ذاته .

ويتعين المنحنى الموجه لمحور بشعاع ما \vec{U} يوازيه ويتحد معه بالاتجاه ، وتسمى مركبات الشعاع \vec{U} على المحاور الاحداثية الأمثال الموجهة للمحور .

وإذا كانت (a, b, c) الأمثال الموجهة لمحور وكان k عدداً موجباً كيفياً فإن (ka, kb, kc) تكون كذلك الأمثال الموجهة للمحور نفسه .

إذا كان الشعاع \vec{U} شعاع واحد فنعندئذ ندعو مركباته على المحاور الاحداثية الوسطاء الموجهة للمحور .

تسمى الزوايا التي يصنعها محور مفروض مع المحاور الاحداثية الزوايا الموجهة للمحور . إن جيوب تمام هذه الزوايا هي الوسطاء الموجهة للمحور .

٢ - تميز زاوية محورين \odot ، الأمثال الموجهة للأول هي (a, b, c) وللثاني هي (a', b', c') بأحد الدستورين :

$$\cos \theta = \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

وأما زاوية مستقيمين متساوي زاوية محورين موازيين لهما أو تكملها .

٣ - بتعامد محوران إذا كان :

$$aa' + bb' + cc' = 0$$

ويتوازيان إذا كان :

$$bc' - cb' = ca' - ac' = ab' - ba' = 0$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \quad \text{أو} :$$

٤ - إذا كان ميلا المستقيمين D_1 و D_2 في المستوي oxy هما m_1 و m_2 على التوالي وإذا كانت θ زاوية المستقيم D_2 مع D_1 فان :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

٢ - نقل المحاور الاحداثية

قد لا يؤدي اختيار المحاور الاحداثية ، عند البحث عن معادلة بعض المحلات الهندسية إلى أبسط شكل لهذه المعادلة ، وقد لا تظهر معادلة المنحنى ، والتي هي ليست إلا علاقة بين الاحداثيين x و y لنقطة متحركة عليه ، خواص هذا المنحنى إذا كان منسوباً لجملة ما من المحاور الاحداثية . ولذلك فالتناظر أحياناً إلى نقل المحاور الاحداثية . والنقل إما أن يكون انسحاباً أو دوراناً أو أن يكون انسحاباً ودوراناً بأن واحد .

١ - ففي الانسحاب ننقل مبدأ الاحداثيات O إلى موضع جديد A دون أن يطرأ أي تغيير على منحنى وجهة المحاور الاحداثية ،

في المستوي : إذا كانت x و y احداثي نقطة ما في المحاور القديمة X و Y احداثي النقطة ذاتها في المحاور الجديدة x_0 و y_0 احداثي A في المحاور القديمة فعندئذ يكون :

$$\begin{aligned}x &= x_0 + X \\y &= y_0 + Y\end{aligned}$$

في الفراغ : إذا كانت x و y و z احداثيات نقطة ما في المحاور القديمة X و Y و Z احداثيات ذات النقطة في المحاور الجديدة x_0 و y_0 و z_0 احداثيات المبدأ الجديد في المحاور القديمة فعندئذ يكون :

$$\begin{aligned}x &= x_0 + X \\y &= y_0 + Y \\z &= z_0 + Z\end{aligned}$$

٢ - وفي الدوران يبقى مبدأ الاحداثيات ثابتاً وتدور المحاور الاحداثية حول هذا المبدأ الثابت . ففي المستوي تبقى المحاور الجديدة في مستوي المحاور القديمة نفسه . فإذا كانت oxy مجموعة المحاور القديمة و oXY مجموعة المحاور الجديدة وكانت الزاوية بين ox و oX تساوي θ أي :

$$(ox, oX) = \theta$$

فعندئذ تكون دساتير النقل بالدوران هي :

$$\begin{aligned}x &= X \cos \theta - Y \sin \theta \\y &= X \sin \theta + Y \cos \theta\end{aligned}$$

في الفراغ : إذا كانت $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ و $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ و $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ هي وسطاء توجيه المحاور الجديدة XYZ بالنسبة للمحاور القديمة xyz ، فعندئذ تكون دساتير النقل بالدوران هي :

$$\begin{aligned}x &= \alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z \\y &= \alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z \\z &= \alpha_3 X + \beta_3 Y + \gamma_3 Z\end{aligned}$$

٣ - وفي الانسحاب والدوران معاً تكون دساتير النقل في المستوي هي :

$$x = x_0 + X \cos \Theta - Y \sin \Theta$$

$$y = y_0 + X \sin \Theta + Y \cos \Theta$$

وفي الفراغ :

$$x = x_0 + \alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z$$

$$y = y_0 + \alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z \quad (١)$$

$$z = z_0 + \alpha_3 X + \beta_3 Y + \gamma_3 Z$$

٤ - نحتاج أحياناً تبديل المحاور الاحداثية القائمة بمحاور مائلة فإذا كانت مجموعة عاور احداثية قائمة في المستوي و oxy مجموعة عاور مائلة متحدة مع الأولى في المبدأ ، وإذا كانت $(\alpha_1 و \beta_1)$ و $(\alpha_2 و \beta_2)$ وسطاء توجيه المحورين الجديدين في جملة المحاور القديمة فعندئذ يكون :

$$x = \alpha_1 X + \alpha_2 Y$$

$$y = \beta_1 X + \beta_2 Y$$

أما إذا كان مبدأ المجموعة الجديدة غير منطبق على مبدأ المجموعة القديمة ، وإذا كانت $x_0 و y_0$ احداثيي المبدأ الجديد بالنسبة للمجموعة القديمة فعندئذ تكون دساتير تبديل المحاور هي :

$$x = x_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 Y$$

$$y = y_0 + \beta_1 X + \beta_2 Y$$

أما في الفراغ فإن دساتير التبديل هي نفس الدساتير (١) ، إلا أنه لا تكون في هذه الحالة وسطاء التوجيه مساوية لجيوب تمام الزوايا التي تصنعها المحاور الجديدة مع المحاور القديمة .

مسائل وممارس محلولة

٦٩ - اذا علمت أن امثال توجيه منحنى موجه هي :

$$(2, 3, 6)$$

احسب وسطاء توجيهه :

الحل :

١- كانت $(2, 3, 6)$ امثال توجيه المنحنى المفروض فان
 $(2k, 3k, 6k)$ كذلك هي امثال توجيه نفس المنحنى الموجه بشرط
أن يكون $k > 0$.

ولما كانت وسطاء التوجيه هي مركبات شعاع واحدة ، فانه يكفي
ن نعين k على شكل يكون فيه :

$$(2k)^2 + (3k)^2 + (6k)^2 = 1$$

$$49k^2 = 1 \quad \text{ويكون :}$$

ويكون بالتالي :

$$k = \frac{1}{7}$$

فوسطاء التوجيه المطلوبة هي :

$$\frac{2}{7} \text{ و } \frac{3}{7} \text{ و } \frac{6}{7}$$

طريقة اخرى : لما كانت أمثال التوجيه لمنحى موجه هي مركبات شعاع ما يوازي هذا المنحى ويتحد معه بالاتجاه فان (2 , 3 , 6) تمثل مركبات شعاع يوازي المنحى المفروض ويتحد معه بالاتجاه . ان طول هذا الشعاع هو :

$$\bullet \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$$

ونحصل على مركبات شعاع واحدة مواز للمنحى المفروض ومتحد معه بالاتجاه بتقسيم الشعاع السابق على 7 وبذلك تكون وسطاء التوجيه هي :

$$\frac{2}{7} \text{ و } \frac{3}{7} \text{ و } \frac{6}{7}$$

٧٠- إذا كانت α و β و γ الزوايا الموجهة لمحور مفروض فبرهن أن :

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$$

الحل :

نعلم أن مركبات شعاع الواحدة الموازي للمحور المفروض والمتحد معه بالاتجاه هي : $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ ولذلك فان :

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

لنعوض في هذه العلاقة جيوب التام بما يساويها بدلالة الجيوب فنجد :

$$1 - \sin^2 \alpha + 1 - \sin^2 \beta + 1 - \sin^2 \gamma = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 \quad \text{ومنه :}$$

وهو المطلوب .

٧١- لدينا النقطتان $P(1, -3, 4)$ و $Q(3, 0, 4)$. أوجد جيب

التام الموجهة لكل من \vec{OP} و \vec{OQ} و \vec{PQ}

الحل :

من الواضح ان طول الشعاع \vec{OP} هو :

$$\sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{26}$$

ولذلك فإن جيب التام الموجهة لـ \vec{OP} هي :

$$\frac{1}{\sqrt{26}} ; \frac{-3}{\sqrt{26}} ; \frac{4}{\sqrt{26}}$$

وأما طول \vec{OQ} فيساوي 5 وجيب التام الموجهة له هي :

$$\frac{3}{5} , 0 ; \frac{4}{5}$$

وبما انه يمكن كتابة \vec{PQ} على الشكل :

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$$

فجيب التام الموجهة له هي :

$$\frac{2}{\sqrt{13}} , \frac{3}{\sqrt{13}} , 0$$

٧٢- لدينا النقط $P(3, 4, 5)$ و $Q(4, 6, 3)$ و $R(-1, 2, 3)$

يـ $S(1, 0, 5)$ أوجد مسقط \vec{RS} على \vec{QP}

الحل :

من الواضح أن :

$$\vec{RS} = \vec{OS} - \vec{OR} = (2, -2, 2)$$

$$\vec{QP} = \vec{OP} - \vec{OQ} = (-1, -2, 2)$$

وبما ان الضرب العددي لشعاعين يساوي طول أحدهما بمسقط الآخر عليه ، وحيث أن طول \vec{QP} يساوي 3 فإن مسقط \vec{RS} على \vec{QP} يساوي الجداء العددي لهذين الشعاعين مقسوماً على 3 أي يساوي :

$$\frac{2(-1) - 2(-2) + 2(2)}{3} = \frac{-2 + 4 + 4}{3} = 2$$

٧٣- لدينا النقط $P(2, 3, -1)$ و $Q(3, 5, -3)$ و $S(3, 5, 7)$ و $R(1, 2, 3)$ برهن أن PQ متعامد مع RS .

الحل :

يمكن ، كما في التمرين السابق ، حساب مركبات كل من \vec{PQ} و \vec{RS} فنجد $(1, 2, -2)$ و $(2, 3, 4)$. والجداء العددي لهذين الشعاعين يساوي :

$$1(2) + 2(3) - 2(4) = 0$$

وبما أنه معدوم فالشعاعان متعامدان وهو المطلوب .

٧٤- لدينا المثلث ABC :

$$A(3, -5, -1) ; B(2, -3, -2) ; C(5, -1, -1)$$

برهن أن هذا المثلث قائم الزاوية في B .

الحل :

يمكن اعتبار مركبات الشعاع \vec{AB} وهي :

$$a = 2 - 3 = -1$$

$$b = -3 - (-5) = 2$$

$$c = -2 - (-1) = -1$$

الأمثال الموجبه للمستقيم AB ، ويمكن اعتبار مركبات الشعاع

$$\vec{BC} \text{ وهي } a' = 3 ; b' = 2 ; c' = 1 .$$

الامثال الموجبه للمستقيم BC .

ولكي يكون المثلث ABC قائم الزاوية في B يلزم أن يكون :

$$a a' + b b' + c c' = 0$$

بالتبديل بهذه العلاقة نجد :

$$-1(3) + 2(2) - 1(1) = 0$$

وهو المطلوب .

٧٥ - لدينا المثلث ABC :

$$A(2, 5, -1) \quad B(1, -1, 3) \quad C(2, 1, 0)$$

١ - احسب الأمثال الموجبة لمناحي أضلاع المثلث .

٢ - احسب زواياه .

الحل :

١ - ان الأمثال الموجبة لمنحى الضلع AB هي :

$$a_1 = 1 - 2 = -1 \quad b_1 = -1 - 5 = -6 \quad c_1 = 3 + 1 = 4$$

بنفس الطريقة نجد الأمثال الموجبة لمنحى الضلع BC :

$$a_2 = 1 \quad b_2 = 2 \quad c_2 = -3$$

والأمثال الموجبة لمنحى الضلع AC

$$a_3 = 0 \quad b_3 = -4 \quad c_2 = 1$$

٢- لحساب الزاوية ABC ، ولنرمز لها بـ ω_1 ، نلاحظ :

$$\cos \omega_1 = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|}$$

وبما أن :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -1(0) - 6(-4) + 4(1) = 28$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{1 + 36 + 16} = \sqrt{53}$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{0 + 16 + 1} = \sqrt{17}$$

يكون :

$$\cos \omega_1 = \frac{28}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{17}} = \frac{28}{\sqrt{901}}$$

بالطريقة نفسها نجد إذا رمزنا بـ ω_2, ω_3 للزاويتين ABC و ACB

على الترتيب :

$$\cos \omega_2 = \frac{25}{\sqrt{742}} ; \cos \omega_3 = \frac{-11}{\sqrt{238}}$$

٧٦ - ليكن المحور $o\Delta$ المعين بـ (α, β, γ) توجيهاً

والنقطة $M(x, y, z)$ ، احسب إحداثيات النقطة M' نظير M بالنسبة للمحور $o\Delta$.

أعد السؤال بفرض أن المحور لا يمر بالمبدأ o إنما يمر بالنقطة

$$A(x_0, y_0, z_0)$$

الحل :

لنفرض أن x', y', z' إحداثيات النقطة M' وأن I مسقط M على $o\Delta$ فعندئذ يكون القياس الجبري لـ \vec{oI} (مسقط \vec{oM} على المحور $o\Delta$) يساوي الجداء العددي للشعاع \vec{oM} بشعاع واحدة للمحور $o\Delta$ أي :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z$$

وبذلك تكون مركبات الشعاع \vec{oI} هي :

$$\alpha' = (\alpha x + \beta y + \gamma z) \alpha$$

$$\beta' = (\alpha x + \beta y + \gamma z) \beta$$

$$\gamma' = (\alpha x + \beta y + \gamma z) \gamma$$

ويكون :

$$\vec{OM'} = \vec{OM} + \vec{MI} + \vec{IM'}$$

$$= \vec{OM} + 2 \vec{MI}$$

$$= 2\vec{OI} - \vec{OM}$$

وبالتالي :

$$x' = 2 \alpha' - x = (2 \alpha^2 - 1) x + 2 \alpha \beta y + 2 \alpha \gamma z$$

$$y' = 2 \beta' - y = 2 \beta \alpha x + (2 \beta^2 - 1) y + 2 \beta \gamma z$$

$$z' = 2 \gamma' - z = 2 \gamma \alpha x + 2 \gamma \beta y + (2 \gamma^2 - 1) z$$

أما إذا لم يمر المحور المفروض بالنقطة o فاننا نجد باعادة المحاكات

السابقة أن :

$$x' = x_0 + (2\alpha^2 - 1)(x - x_0) + 2\alpha\beta(y - y_0) + \alpha\gamma(z - z_0)$$

$$y' = y_0 + 2\beta\alpha(x - x_0) + (2\beta^2 - 1)(y - y_0) + 2\beta\gamma(z - z_0)$$

$$z' = z_0 + 2\gamma\alpha(x - x_0) + 2\gamma\beta(y - y_0) + (2\gamma^2 - 1)(z - z_0)$$

٧٧- إذا كان احداثيا نقطة ما M في مجموعة محاور احداثية

oxy هما :

$$x = 7 \quad y = 8$$

فأوجد احداثي هذه النقطة في مجموعة محاور جديدة AXY إذا علمت :

(١) أن المبدأ الجديد يقع في النقطة A (2 , 3)

(٢) ان النقطة (6 , 0) تقع على النصف الموجب لمحور العينات

الجديد AY .

الحل :

لنسحب زاوية الدوران θ .

ان ميل محور العينات الجديد هو :

$$\frac{0 - 3}{6 - 2} = - \frac{3}{4}$$

وبما ان محور العينات الجديد يصنع مع ox زاوية مقدارها

$$(\theta + \frac{\pi}{2}) \text{ اذن :}$$

$$\text{tg} (\theta + \frac{\pi}{2}) = - \frac{3}{4}$$

ومنه :

$$\text{tg} \theta = \frac{4}{3}$$

وبما أن محور العينات الجديد يصنع مع محور السينات زاوية محصورة بين $-\frac{\pi}{2}$ والصفر أي بين $\frac{3\pi}{2}$ و 2π ، وحيث أن محور السينات الجديد عمودي مباشرة على محور العينات الجديد فإن الزاوية θ محصورة بين π و $\frac{3\pi}{2}$ ، إذن :

$$\cos \theta = -\frac{3}{5} \quad , \quad \sin \theta = -\frac{4}{5}$$

وعلى هذا فإن دساتير التحويل :

$$x = x_0 + X \cos \theta - Y \sin \theta$$

$$y = y_0 + X \sin \theta + Y \cos \theta$$

تصبح في هذه الحالة .

$$x = 2 - \frac{3}{5} X + \frac{4}{5} Y$$

$$y = 3 - \frac{4}{5} X - \frac{3}{5} Y$$

ومن أجل النقطة M يكون :

$$7 = 2 - \frac{3}{5} X + \frac{4}{5} Y$$

$$8 = 3 - \frac{4}{5} X - \frac{3}{5} Y$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد :

$$X = -7 \quad , \quad Y = 1$$

٧٨ - تقع رؤوس مربع في النقط (0 ، 0) ، (2 ، 0) ،

(2 , 2) ، (0 ، 2) على التوالي . أوجد دساتير نقل المحاور عندما نتخذ أقطار المربع كمحاور احداثية جديدة OXY بشكل يقع فيه الرأس (2 , 0) على النصف الموجب للمحور OX .

الحل :

من الواضح ان محور السينات يمر بالنقطتين (0 , 2) و (2 , 0)
فميله يكون :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2 - 0}{0 - 2} = - 1$$

ويكون بالتالي :

$$\theta = - \frac{\pi}{4}$$

وعلى هذا :

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \sin \theta = - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

واما المبدأ الجديد ، الذي يقع في مركز المربع ، فهو منتصف القطعة الواصلة بين النقطتين (0 , 2) و (2 , 0) أو في منتصف القطعة

الواصلة بين (0 , 0) و (2 , 2)

اذن :

$$x_o = \frac{2 + 0}{2} = 1$$

$$y_o = \frac{2 + 0}{2} = 1$$

وتكون بالتالي دساتير التحويل :

$$x = 1 + \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$$

$$y = 1 - \frac{X-Y}{\sqrt{2}}$$

٧٩ - في نقل للمحاور يقع المبدأ الجديد في النقطة $(1, -2)$.
ويضع محور العينات الجديد مع محور السينات القديم زاوية حادة موجبة
ذات ظل يساوي $\frac{3}{4}$ ابحث عن النقط التي تكون من أجلها الاحداثيات
القديمة مساوية للاحداثيات الجديدة .

الحل :

إذا كانت θ الزاوية التي يضعها محور السينات الجديد مع محور
السينات القديم فإن :

$$\operatorname{tg} \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3}{4}$$

ومنـه

$$\operatorname{tg} \theta = - \frac{4}{3}$$

وبما أن الزاوية θ محصورة بين $\frac{3\pi}{2}$ و 2π فإن :

$$\cos \theta = \frac{3}{5} \quad , \quad \sin \theta = - \frac{4}{5}$$

وعلى هذا تكون دساتير التحويل :

$$x = 1 + \frac{3}{5}X + \frac{4}{5}Y$$

$$y = -2 - \frac{4}{5}X + \frac{3}{5}Y$$

وللحصول على النقط التي من أجلها تكون الاحداثيات القديمة مساوية
للأحداثيات الجديدة نضع :

$$x = X , y = Y$$

فنجد :

$$x = 1 + \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y$$

$$y = -2 - \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد :

$$x = -\frac{3}{2} , y = -2$$

٨٠ - لدينا المنحني الممثل ، في مستوي الاحداثيات xoy ، بالمعادلة :

$$x^2 + xy + 2x + y - 2 = 0$$

اوجد معادلة هذا المنحني اذا سحبنا المحاور الاحداثية الى مركز

تناظر المنحني .

الحل :

إن مبدأ الاحداثيات ليس مركز تناظر للمنحني لاننا اذا بدلنا

x بـ $-x$ و y بـ $-y$ فإن معادلة المنحني تتغير بسبب وجود حدود من

المرتبة الأولى وهما $2x + y$ ولذلك فاننا نسحب المحاور إلى مبدأ جديد

$$x_0 , y_0$$

ان دساتير النقل بالانسحاب هي :

$$x = x_0 + X$$

$$y = y_0 + Y$$

لنبذل في معادلة المنحني فنجد :

$$(x_0 + X)^2 + (x_0 + X)(y_0 + Y) + 2(x_0 + X) + y_0 + Y - 2 = 0$$

أو :

$$X^2 + X Y + (2x_0 + y_0 + 2)X + (x_0 + 1)Y + x_0^2 + x_0 y_0 + 2x_0 + y_0 - 2 = 0$$

وانعين x_0 و y_0 بشكل تنعدم فيه الحدود التي تحوي X و Y في المعادلة الجديدة المنسوبة الى المحاور الجديدة . ان هذا يتم اذا كان :

$$2x_0 + y_0 + 2 = 0$$

$$x_0 + 1 = 0$$

ويج هاتين المعادلتين نجد :

$$x_0 = -1 ; \quad y_0 = 0$$

ومعادلة المنحني تأخذ الشكل :

$$X^2 + X Y - 3 = 0$$

وهذه هي المعادلة المطلوبة اذ يلاحظ انها تمثل منحياً متناظراً بالنسبة لنقطة الاصل .

٨١ - برهن ان دورانياً للمحاور بزاوية مقدارها α ينقل العبارة :

$$A x^2 + 2 B xy + cy^2$$

الى الشكل :

$$A_1 X^2 + 2 B_1 X Y + C_1 Y^2$$

حيث :

$$A_1 + C_1 = A + C$$

$$A_1 - C_1 = 2 B \sin 2 \alpha + (A - C) \cos 2 \alpha$$

$$2 B_1 = 2 B \cos 2 \alpha - (A - C) \sin 2 \alpha$$

$$B_1^2 - A_1 C_1 = B^2 - AC$$

واستنتج من ذلك أن دوراناً للمحاور بزاوية مقدارها α معطاة
بالعلاقة :

$$\operatorname{tg} 2 \alpha = \frac{2 B}{A - C}$$

تنقل المعادلة :

$$A x^2 + 2 B x y + C y^2 + D x + E y + F = 0$$

إلى الشكل :

$$A_1 X^2 + C_1 Y^2 + D_1 X + E_1 Y + F_1 = 0$$

الحل :

إن دساتير النقل بالدوران هي :

$$x = X \cos \alpha - Y \sin \alpha$$

$$y = X \sin \alpha + Y \cos \alpha$$

لنبدل في العبارة :

$$A x^2 + 2 B x y + c y^2$$

فنجد :

$$A (X \cos \alpha - Y \sin \alpha)^2 + 2 B (X \cos \alpha - Y \sin \alpha)$$

$$(X \sin \alpha + Y \cos \alpha) + C (X \sin \alpha + Y \cos \alpha)^2$$

أو :

$$\begin{aligned} & A \cos^2 \alpha + 2 B \cos \alpha \sin \alpha + C \sin^2 \alpha) X^2 \\ & - 2 (A \cos \alpha \sin \alpha - B \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha - C \sin \alpha \cos \alpha) XY \\ & + (A \sin^2 \alpha - 2 B \cos \alpha \sin \alpha + C \cos^2 \alpha) Y^2 \end{aligned}$$

أو :

$$A_1 X^2 + 2 B_1 X Y + C_1 Y^2$$

حيث :

$$A_1 = A \cos^2 \alpha + 2 B \cos \alpha \sin \alpha + C \sin^2 \alpha$$

$$B_1 = (C - A) \cos \alpha \sin \alpha + B \cos 2 \alpha$$

$$C_1 = A \sin^2 \alpha - 2 B \cos \alpha \sin \alpha + C \cos^2 \alpha$$

من هذه العلاقة نجد بسهولة أن :

$$A_1 + C_1 = A + C$$

$$A_1 - C_1 = 2 B \sin 2 \alpha + (A - C) \cos 2 \alpha$$

$$2 B_1 = 2 B \cos 2 \alpha - (A - C) \sin 2 \alpha$$

$$B_1^2 - A_1 C_1 = B^2 - AC$$

وهو الجزء الأول من المطلوب . من أجل الجزء الثاني نختار على شكل تنعدم فيه أمثال XY في الشكل الجديد للعبارة أي :

$$B_1 = 0$$

فنجد :

$$\operatorname{tg} 2 \alpha = \frac{2 B}{A - C}$$

وهو المطلوب .

٨٢- المطلوب اختزال معادلة المنحني :

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$$

وذلك باختيار مناسب للمعاور الاحداثية .

الحل :

لنسحب المحاور الاحداثية إلى النقطة A ذات الاحداثين x_0 و y_0 ،
فعندئذ تكون دساتير النقل بالانسحاب :

$$x = x_0 + X$$

$$y = y_0 + Y$$

لنبدل في معادلة المنحني فنجد :

$$5(x_0 + X)^2 + 4(x_0 + X)(y_0 + Y) + 8(y_0 + Y)^2 - 32(x_0 + X) - 56(y_0 + Y) + 80 = 0$$

أو :

$$5X^2 + 4XY + 8Y^2 + (10x_0 + 4y_0 - 32)X + (4x_0 + 16y_0 - 56)Y + 5x_0^2 + 4x_0y_0 + 8y_0^2 - 32x_0 - 56y_0 + 80 = 0$$

لنعين x_0 و y_0 على شكل تنعدم فيه أمثال X و Y في المعادلة الأخيرة ، أي :

$$10x_0 + 4y_0 - 32 = 0$$

$$4x_0 + 16y_0 - 56 = 0$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد احداثي المبدأ الجديد ، والذي يمثل في الحقيقة مركز تناظر المنحني المفروض .

$$x_0 = 2 ; y_0 = 3$$

وبذلك تصبح معادلة المنحني بالنسبة للمحاور الجديدة :

$$(1) \quad 5 X^2 + 4 XY + 8 Y^2 - 36 = 0$$

لندور بعد ذلك المحاور الاحداثية زاوية مقدارها θ معطاة بالعلاقة

(انظر المسألة السابقة) :

$$\operatorname{tg} 2 \theta = \frac{2 B}{A - C} = \frac{4}{5 - 8} = -\frac{4}{3}$$

ويكون :

$$\cos 2 \theta = -\frac{3}{5} ; \sin 2 \theta = \frac{4}{5}$$

وأما دساتير الدوران فهي :

$$X = X_1 \cos \theta - Y_1 \sin \theta$$

$$Y = X_1 \sin \theta + Y_1 \cos \theta$$

لنبدل في معادلة المنحني فنجد :

$$A_1 X^2 + C_1 Y^2 - 36 = 0$$

حيث :

$$A_1 + C_1 = 13$$

$$A_1 - C_1 = 4 \sin 2 \theta - 3 \cos 2 \theta = 5$$

ومنه :

$$A_1 = 9 \quad C_1 = 4$$

وتكون معادلة المنحني المطلوبة هي :

$$(2) \quad 9 X^2 + 4 Y^2 = 36$$

هذا ويلاحظ أنه من الممكن ، عند حساب $\sin 2 \theta$ و $\cos 2 \theta$

من العلاقة :

$$\operatorname{tg} 2 \theta = -\frac{4}{3}$$

أن نأخذ :

$$\cos 2 \theta = \frac{3}{5} \quad \sin 2 \theta = -\frac{4}{5}$$

فعندئذ يكون :

$$A_1 + C_1 = 13$$

$$A_1 - C_1 = -5$$

ومنه :

$$A_1 = 4 \quad C_1 = 9$$

وتصبح معادلة المنحني :

$$(3) \quad 4 X^2 + 9 Y^2 = 36$$

إذا لم يكن مطلوباً حساب زاوية الدوران θ فعندئذ يكون من الممكن الحصول على معادلة المنحني بعد الدوران بدءاً من (1) بواسطة العلاقات :

$$A_1 + C_1 = A + C = 5 + 8 = 13$$

$$-A_1 C_1 = B^2 - A C = 4 - 40 = -36$$

لأن $B_1 = 0$ ، وبجمل هاتين المعادلتين نجد : $C_1 = 4$; $A_1 = 9$ أو $C_1 = 9$; $A_1 = 4$ وبذلك نصل إلى المعادلتين (2) و (3) .

٨٣ - اختزل معادلة القطع المكافئ :

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$$

وذلك بأن تبدأ بدوران للمجاور ينعدم بسببه الحد الذي يحوي XY

ثم تسحب بعد ذلك المحاور على شكل لا يبقى في المعادلة سوى حدين فقط .

الحل :

إن زاوية الدوران تتعين من العلاقة :

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{2 B}{A-C} = \frac{-2}{1-1}$$

ومنه :

$$2 \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{ويكون :}$$

وتصبح دساتير الدوران :

$$x = \frac{X - Y}{\sqrt{2}} \quad y = \frac{X + Y}{\sqrt{2}}$$

لنبدل في المعادلة الأصلية فنجد :

$$2 Y^2 - \frac{4 X}{\sqrt{2}} + 1 = 0$$

لنسحب المحاور إلى النقطة $(\frac{\sqrt{2}}{4}, 0)$ ، فعندئذ تصبح المعادلة

على الشكل :

$$Y_1^2 = \sqrt{2} X_1$$

٨٤ - لدينا المعادلة من الدرجة الثانية :

$$A x^2 + 2 Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

١- برهن انه إذا كان $AC - B^2 = 0$ ، $A > 0$ ، فمعدنه يمكن أن نكتب :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$(ax + by + h)^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

حيث :

$$\alpha = D - 2ah ; \beta = E - 2bh ; \gamma = F - h^2$$

$$A = a^2 ; B = ab$$

٢- برهن انه يمكن اختيار العدد h على شكل يتعامد فيه المستقيم :

$$ax + by + h = 0$$

مع المستقيم :

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

وذلك ضمن الشرط :

$$\frac{D}{a} \neq \frac{E}{b}$$

الحل :

١ - لنبدل A بـ a^2 في المعادلة المفروضة فنجد :

$$a^2 x^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

وحيث أن :

$$B = ab$$

$$C = \frac{B^2}{A} = \frac{a^2 b^2}{a^2} = b^2 \quad \text{و :}$$

فانه يمكن كتابة المعادلة على الشكل :

$$(a x + b y + h)^2 + (D - 2 a h) x + (E - 2 b h) y + F - h^2 = 0$$

أو :

$$(a x + b y + h)^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

٢- كي يتعامد المستقيمان يجب أن يكون :

$$a \alpha + b \beta = 0$$

$$a (D - 2 a h) + b (E - 2 b h) = 0 \quad \text{أو :}$$

ومنه :

$$h = \frac{a D + b E}{2 (a^2 + b^2)}$$

وهي قيمة h المطلوب بشرط أن لا تجعل كلا من α و β معدومين
بأن واحد .

لذلك نحسب قيمة α و β :

$$\alpha = D - \frac{a (a D + b E)}{a^2 + b^2} = \frac{b (b D - a E)}{a^2 + b^2}$$

$$\beta = E - \frac{b (a D + b E)}{a^2 + b^2} = \frac{a (a E - D b)}{a^2 + b^2}$$

ومن هاتين القيمتين نلاحظ أن α و β تنعدمان بأن واحد
إذا كان :

$$a E - D b = 0$$

$$\frac{D}{a} = \frac{E}{b} \quad \text{أي :}$$

وهذا ما يخالف نص المسألة وهو المطلوب .

٨٥ - اختزل المعادلة :

$$x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$$

مستفيداً من المسألة السابقة .

الحل :

نلاحظ أن :

$$B^2 - 4AC = 1 - 1 = 0$$

ولذلك يمكن كتابة المعادلة المفروضة على الشكل :

$$(x + y + h)^2 - (8 + 2h)x - 2hy + 4 - h^2 = 0$$

لنعين h على شكل يتعامد فيه المستقيمان :

$$x + y + h = 0$$

$$-(8 + 2h)x - 2hy + 4 - h^2 = 0$$

فتجد :

$$h = -2$$

وتصبح المعادلة :

$$(x + y - 2)^2 - 4(x - y) = 0$$

لتكن المحاور الاحداثية منطبقة على المستقيمين المتعامدين .

$$x + y - 2 = 0$$

$$x - y = 0$$

فتكون دساتير التحويل :

$$x = 1 + \frac{X - Y}{\sqrt{2}}$$

$$y = 1 + \frac{X + Y}{\sqrt{2}}$$

وبذلك تصبح المعادلة على الشكل :

$$X^2 + 2\sqrt{2}Y = 0$$

٨٦ - المعادلتان الوسيطتان للهيپوسيكلويد هما :

$$x = a(2 \cos t + \cos 2t) ; y = a(2 \sin t - \sin 2t)$$

سحبنا محوري الاحداثيات الى النقطة $O(-a, 0)$ اكتب المعادلة الديكارتية للمنحنى بالنسبة لهذين المحورين الجديدين .

الحل :

من الواضح أن :

$$X = x + a \quad Y = y$$

أي :

$$X = a(2 \cos t + 2 \cos^2 t) = 2a \cos t(1 + \cos t)$$

$$Y = a(2 \sin t - 2 \sin t \cos t) = 2a \sin t(1 - \cos t)$$

ومن هاتين المعادلتين نجد :

$$(X^2 + Y^2)^2 + 4aX(5Y^2 - 3X^2) + 4a^2(12X^2 - Y^2) - 64a^3X = 0$$

٨٧ - المعادلتان الوسيطتان للسيكلويد هما :

$$x = a(t - \sin t) ; y = a(1 - \cos t)$$

سحبنا محوري الاحداثيات إلى ذروة السيكلويد $S(\pi a, 2a)$ اكتب المعادلتين الوسيطتين للسيكلويد بالنسبة للمحورين الجديدين .

الحل :

من الواضح أن :

$$x = \pi a + X ; y = 2a + Y$$

ومنه :

$$X = a (t - \sin t - \pi) \quad ; \quad Y = - a (1 + \cos t)$$

يمكن ادخال وسيط جديد بدلاً من الوسيط t ، فلو وضعنا مثلاً

$$u = t - \pi \quad \text{لوجدنا :}$$

$$X = a (u + \sin u) \quad ; \quad Y = a (\cos u - 1)$$

٨٨ - لدينا السطح الممثل ، في مجموعة المحاور الاحداثية القائمة ،

بالمعادلة .

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2 x y - 2 y z + 6 x z + 2 x - 6 y - 2 z = 0$$

اوجد معادلة هذا السطح اذا سحبت المحاور الاحداثية الى مركز

تناظر السطح .

الحل :

ان دساتير النقل بالانسحاب هي :

$$x = x_0 + X$$

$$y = y_0 + Y$$

$$z = z_0 + Z$$

لنبدل في معادلة السطح فنجد :

$$\begin{aligned} & (x_0 + X)^2 + (y_0 + Y)^2 + (z_0 + Z)^2 + 2 (x_0 + X) (y_0 + Y) \\ & - 2 (y_0 + Y) (z_0 + Z) + 6 (x_0 + X) (z_0 + Z) + 2 (x_0 + X) \\ & - 6 (y_0 + Y) - 2 (z_0 + Z) = 0 \end{aligned}$$

لنعين x_0 و y_0 و z_0 بشكل تنعدم فيه امثال X و Y و Z :

$$2 x_0 + 2 y_0 + 6 z_0 + 2 = 0$$

$$2 y_0 + 2 x_0 - 2 z_0 - 6 = 0$$

$$2 z_0 - 2 y_0 + 6 x_0 - 2 = 0$$

وبجمل جملة المعادلات هذه نجد :

$$x_0 = 1 = ; y_0 = 1 ; z_0 = -1$$

ومعادلة السطح تأخذ الشكل :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + 2 X Y - 2 Y Z + 6 X Z - 1 = 0$$

وهذه هي المعادلة المطلوبة إذ يلاحظ انها تمثل سطحاً متناظراً بالنسبة

لنقطة الاصل :

٨٩ - ليكن لدينا المعادلتان :

$$x + y + z = 0$$

$$yz + zx + xy + a^2 = 0$$

لندور المحاور $oxyz$ إلى الوضع الجديد $oXYZ$ على شكل

تكون فيه وسطاء توجيه المحاور الجديدة على التوالي هي :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

ما هو الشكل الجديد للمعادلتين . استنتج من ذلك ان الحل المشترك

للمعادلتين هو دائرة نصف قطرها $\sqrt{2} a$.

الحل :

ان دساتير النقل بالدوران في هذه الحالة تكون :

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} X + \frac{1}{\sqrt{2}} Y + \frac{1}{\sqrt{6}} Z$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} X - \frac{2}{\sqrt{6}} Z$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}} X - \frac{1}{\sqrt{2}} Y + \frac{1}{\sqrt{6}} Z$$

بالتبديل في المعادلتين المفروضين نجد :

$$X = 0$$

$$2 X^2 - Y^2 - Z^2 + 2 a^2 = 0$$

والحل المشترك للمعادلتين هو :

$$Y^2 + Z^2 = 2 a^2$$

وهي معادلة دائرة ، نصف قطرها $\sqrt{2} a$

مسائل وتمارين غير محلولة

٩٠- احسب زوايا المثلث PQR حيث :

$$P(2, 3, 5) ; Q(-1, 3, 2) ; R(3, 5, -2)$$

٩١- احسب زوايا المثلث ABC حيث :

$$A(1, 2) ; B(1 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}) ; C(1 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$$

٩٢- oxzy جملة محاور احداثية مائلة ، الزاوية بين كل محورين منها

تساوي $\frac{\pi}{3}$. أوجد الزاوية بين المستقيمين اللذين أمثلها الموجهة في جملة المحاور المذكورة هي :

$$(3, 4, 5) ; (2, 3, 4) \quad (١)$$

$$(1, -2, 1) ; (2, 3, 4) \quad (٢)$$

٩٣- برهن أن المثلث الذي رؤوسه $A(-5, 3); B(4, 0); C(6, 6)$ قائم الزاوية في B . جد احداثي D ، الرأس الرابع من المستطيل $ABCD$.

٩٤- أوجد معادلة المنحني :

$$x y - 3 x + 2 y - 12 = 0$$

عندما نسحب مبدأ الاحداثيات إلى النقطة $(-2, 3)$.
٩٥ - اسحب المحاور كي تأخذ المعادلة :

$$2 x^2 + 3 y^2 - 10 x + 18 y + 26 = 0$$

أبسط شكل لها .

٩٦ - أوجد المعادلة الجديدة في كل من المنحنيات التالية بعد أن تدور المحاور بالزاوية المعطاة بجانب كل منحني :

$$\theta = 45^\circ \quad x y = 1 \quad (١)$$

$$\theta = 45^\circ \quad x^2 + y^2 = a^2 \quad (٢)$$

$$\theta = 60^\circ \quad \sqrt{3}x - y = 4 \quad (٣)$$

$$\theta = 45^\circ \quad x^2 + x y + y^2 = 1 \quad (٤)$$

٩٧- أوجد الزاوية التي يجب أن تدورها جملة المحاور كي يختفي الحد

الذي يحوي XY في المعادلة بعد الدوران :

$$x^2 - x y + 5 = 0 \quad (١)$$

$$x^2 + 3 x y - x + y = 0 \quad (٢)$$

اختزل المعادلات الآتية إلى أبسط شكل لها بانسحاب ودوران ملائتين .

$$3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 2x - 2\sqrt{3}y - 16 = 0 \quad - ٩٨$$

$$7x^2 + 48xy - 7y^2 - 150x - 50y + 100 = 0 \quad - ٩٩$$

$$x^2 - xy + y^2 - 5x + y - 2 = 0 \quad - ١٠٠$$

$$x^2 + 3xy - 2y^2 - 7x - 2y + 16 = 0 \quad - ١٠١$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4y - 3 = 0 \quad - ١٠٢$$

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0 \quad - ١٠٣$$

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0 \quad - ١٠٤$$

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0 \quad - ١٠٥$$

١٠٦- لدينا السطح الممثل ، في جملة المحاور الاحداثية القائمة ، بالمعادلة:

$$2x^2 + 6y^2 + 2y^2 + 8xz - 4x - 8y + 3 = 0$$

اوجد معادلة هذا السطح إذا سحبنا المحاور الاحداثية إلى مركز

السطح .

١٠٧- أعد المسألة السابقة نفسها من أجل السطح :

$$4xy + 4xz - 4y - 4z - 1 = 0$$

١٠٨- لدينا المعادلة :

$$x^2 + 4(y^2 + z^2) = 2$$

المنسوبة إلى جملة محاور احداثية قائمة . لنستبدل هذه الجملة بجملة

أخرى مائلة ، متحدة مع الأولى بالمبدأ ، واما محاورها فمعيّنة بالأمثال

الموجّهة :

$$(2, 1, 1) ; (4, \sqrt{3}-1, \sqrt{3}+1) ; (4, -\sqrt{3}-1, \sqrt{3}-1)$$

برهن أن المعادلة الجديدة هي :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

الاجوبة

$$90^\circ ; \arccos \frac{\sqrt{6}}{3} ; \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \quad - ٩٠$$

$$\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4} \quad - ٩١$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (2) \quad \arccos \frac{22}{7\sqrt{10}} \quad (1) \quad - ٩٢$$

$$(-3, 9) \quad - ٩٣$$

$$XY = 6 \quad - ٩٤$$

$$\text{المبدأ الجديد } \left(-\frac{5}{2}, -3 \right), \text{ المعادلة بعد سحب المحاور} \quad - ٩٥$$

$$4X^2 + 6Y^2 = 27$$

$$X^2 - Y^2 = 2 \quad (١) \quad - ٩٦$$

$$X^2 + Y^2 = a^2 \quad (٢)$$

$$Y = -2 \quad (٣)$$

$$3X^2 + Y^2 = 2 \quad (٤)$$

$$67 \frac{1}{2} \quad (١) \quad - ٩٧$$

$$\frac{1}{2} \arctg 3 \quad (٢)$$

$$2X^2 = Y \quad - ٩٨$$

$$X^2 - Y^2 = 4 \quad - ٩٩$$

$$X^2 + 3Y^2 = 18 \quad - ١٠٠$$

$$(3\sqrt{2} - 1)X^2 - (3\sqrt{2} + 1)Y^2 = -18 \quad - ١٠١$$

$2 Y^2 = 7$	- 11.2
$X^2 + 9 Y^2 = 9$	- 11.3
$9 X^2 - 4 Y^2 = 9$	- 11.4
$Y^2 = 2 X$	- 11.5
$2 X^2 + 6 Y^2 + 2 Z^2 + 8 X Z + 1 = 0$	- 11.6
$4 X Y + 4 X Z = 1$	11.7

* * *

الفصل الثالث

المستقيم في المستوي وتطبيقاته

١ - كل معادلة من الدرجة الأولى في متحولين x و y تمثل في المستوي المنسوب الى مجموعة المحورين المتعامدين xoy مستقيماً ، وبالعكس كل مستقيم في المستوي يمثل بمعادلة من الدرجة الأولى في متحولين .

٢ - ان المعادلة الشعاعية لمستقيم مار من نقطة $M_0 (x_0, y_0)$ وموازي

لشعاع مفروض $\vec{V} (a, b)$ هي :

$$M_0 \vec{M} = \varrho \vec{V}$$

حيث ϱ عدد جبري يأخذ كل القيم الممكنة .
والمعادلتان الوسيطيتان لهذا المستقيم هما :

$$x = x_0 + a \varrho$$

$$y = y_0 + b \varrho$$

ولو حذفنا الوسيط ϱ لحصلنا على المعادلة الديكارية .

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

ان ميل هذا المستقيم يساوي $\frac{b}{a}$

٣ - ان المعادلة الشعاعية لمستقيم مار من النقطتين $M_1 (x_1, y_1)$

و $M_2 (x_2, y_2)$ هي :

$$\overrightarrow{M_1 M} = \varrho \overrightarrow{M_1 M_2}$$

والمعادلتان الوسيطتان هما :

$$x = x_1 + \varrho (x_2 - x_1)$$

$$y = y_1 + \varrho (y_2 - y_1)$$

وبحذف الوسيط ϱ نحصل على المعادلة الديكارتية :

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

التي يمكن كتابتها بالشكل :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ان ميل هذا المستقيم يساوي :

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

يمكن كتابة المعادلتين الوسيطيتين للمستقيم المار بنقطتين بالشكل :

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} ; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

بفرض أن $\lambda \neq -1$.

٤ - ان المعادلة الشعاعية لمستقيم مار بالنقطة $M_0 (x_0, y_0)$ وعمودي على

الشعاع $\vec{V} (a, b)$ هي :

$$\overrightarrow{M_0 M} \cdot \vec{V} = 0$$

والمعادلة الديكارتية هي :

$$(x - x_0) a + (y - y_0) b = 0$$

ان ميل هذا المستقيم يساوي $-\frac{a}{b}$

ه - يتعين المستقيم كذلك بالشكل التالي : نأخذ محوراً Δ عمودياً على المستقيم فيقطعه في نقطة P . إن المستقيم المفروض يتعين بالزاوية ω التي يصنعها المحور Δ مع المحور Ox وبفاصلة P على المحور Δ ولتكن p . وتكون معادلة المستقيم :

$$x \cos \omega + y \sin \omega - p = 0 \quad (1)$$

ان هذا الشكل يدعى بالشكل الناطقي لمعادلة المستقيم .

و - نحصل على المعادلة القطبية لمستقيم بتبديل كل x بـ $q \cos \varphi$ وكل y بـ $q \sin \varphi$ في المعادلة الناطقة للمستقيم (1) فنجد :

$$q = \frac{p}{\cos (\varphi - \omega)}$$

و - بعد نقطة $M (x_1, y_1)$ عن مستقيم ممطى بمعادلته الناطقة (1)

يعطي بالدستور :

$$d = |x_1 \cos \omega + y_1 \sin \omega - p|$$

اما اذا اعطي المستقيم بمعادلته العامة .

$$A x + B y + c = 0$$

فعمدئذ يعطى بعد النقطة $M (x_1, y_1)$ عن هذا المستقيم بالدستور .

$$d = \frac{|A x_1 + B y_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

٨ - ان زاوية المستقيمين المميين بالمعادلتين .

$$y = m x + h$$

$$y = m' x + h'$$

ولنرمز لها بـ v تعطى بالعلاقة :

$$\operatorname{tg} v = \frac{|m - m'|}{1 + m m'}$$

بتمامد المستقيان إذا كان $m m' = -1$.
٩ - يتقاطع المستقيان :

$$A x + B y + C = 0$$

$$A' x + B' y + C' = 0$$

إذا كان :

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$$

ويتوازيان إذا كان :

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

ويتطابقان إذا كان :

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

١٠ - ان المستقيم :

$$A x + B y + C = 0$$

يقسم المنوي الى نصفين يكون من اجل نقط أحدهما :

$$A x + B y + C > 0$$

ومن اجل نقط الآخر :

$$A x + B y + C < 0$$

١١ - منصف الزاوية الحادة من تقاطع المستقيمين :

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

بتعينان بالمعادلتين :

$$\frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

١٢ - إذا كان لدينا المستقيان :

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \quad (2)$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \quad (3)$$

فان المستقيمتان :

$$(A_1 x + B_1 y + C_1) + \lambda (A_2 x + B_2 y + C_2) = 0 \quad (4)$$

حيث λ وسيط متحول تشكل حزمة مستقيمت خطية .

المستقيمتان (2) و (3) يسميان مستقيمتي القاعدة .

فاذا كان مستقيمتا القاعدة متقاطعين فعندئذ تمثل (4) كل المستقيمت المارة بنقطة التقاطع .

وإذا كان مستقيمتا القاعدة متوازيين فعندئذ تمثل (4) كل المستقيمت الموازية

لها ، وذلك عندما نأخذ λ كل الأعداد الحقيقية باستثناء القيمة $\lambda = -\frac{A_1}{A_2}$

وإذا كان مستقيمتا القاعدة منطبعين فعندئذ تمثل (4) نفس المستقيم .

١٣ - الشرط اللازم والكافي كي تولد المستقيمت :

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

$$A_3 x + B_3 y + C_3 = 0$$

حزمة خطية هو ان يتحقق الشرط :

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

١٤ - حتى تقع النقط الثلاث (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) ، (x_3, y_3) على

استقامة واحدة يلزم ان يكون :

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3 = 0$$

أو بشكل آخر :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

١٥ - كذلك ان الشكل العام لمعادلة المستقيم في مجموعة محاور احداثيات مائلة هو :

$$a x + by + c = 0$$

مسائل وتمارين ملونة

١٠٩- إذا علمت ان منتصفات أضلاع مثلث هي :

$$A (1 , 2) \quad B (7 , 4) \quad C (3 , - 4)$$

فاكتب معادلات أضلاعه :

الحل :

لنفرض أن رؤوس المثلث تقع في النقط

$$A (x_1 , y_1) \quad ; \quad B' (x_2 , y_2) \quad ; \quad C' (x_3 , y_3)$$

فعندئذ يكون :

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 3 \quad ; \quad \frac{y_1 + y_2}{2} = - 4$$

$$\frac{x_1 + x_3}{2} = 7 \quad ; \quad \frac{y_1 + y_3}{2} = 4$$

$$\frac{x_2 + x_3}{2} = 1 \quad ; \quad \frac{y_2 + y_3}{2} = 2$$

وبجمل جملة المعادلات هذه نجد :

$$x_1 = 9 ; \quad x_2 = -3 ; \quad x_3 = 5$$

$$y_1 = -2 ; \quad y_2 = -6 ; \quad y_3 = 10$$

وتكون معادلة الضلع $A' B'$:

$$\frac{x+3}{12} = \frac{y+6}{4}$$

أو :

$$x - 3y = 15$$

بالطريقة نفسها نجد معادلتى الضلعين $A' C'$ و $B' C'$:

$$y + 3x = 25$$

$$2x - y = 0$$

١١٠- اكتب المعادلة الديكارتية للمستقيم الذي يصل بين $A(1, 2)$ و

$B(10, 8)$ ثم اكتب معادلتين وسيطيتين له . عين بعد ذلك معادلة

العمود النازل من $C(11, 0)$ على AB ، وإحداثيي نقطة

تقاطع المستقيمين .

الحل :

نعلم ان المعادلة الديكارتية للمستقيم المار بالنقطتين (x_1, y_1) و

(x_2, y_2) هي :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

فالمعادلة الديكارتية المطلوبة :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 10 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

وبنشر هذا المعين وفق عناصر السطر الأول نجد :

$$x(2-8) - y(1-10) + 1(8-20) = 0$$

أو :

$$-6x + 9y - 12 = 0$$

وبالاختصار على (3) نحصل :

$$(1) \quad -2x + 3y - 4 = 0$$

ويمكن الحصول على تمثيل وسيطي للمستقيم بالتعويض في الدستورين :

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} ; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

ف نجد :

$$x = \frac{1 + 10\lambda}{1 + \lambda} ; \quad y = \frac{2 + 8\lambda}{1 + \lambda}$$

إن الأمثال الموجبة للعمود على المستقيم AB هي أمثال x و y في

معادلة هذا المستقيم (1) ، أي (2, 3) فمعادلة العمود المطلوب هي :

$$\frac{x-11}{-2} = \frac{y-0}{3}$$

أو :

$$(2) \quad 3x + 2y - 33 = 0$$

وبحل المعادلتين (1 و 2) نحصل على نقطة التقاطع (7, 6) .

١١١ - اكتب معادلة العمود في منتصف القطعة AB حيث :

$$B(4, -3) , A(2, 1)$$

الحل :

إن احداثي منتصف AB هما :

$$x = \frac{4 + 2}{2} = 3 ; y = \frac{-3 + 1}{2} = -1$$

والامثال الموجهة للمستقيم AB هي :

$$a = 4 - 2 = 2 ; b = -3 - 1 = -4$$

وبهذا نؤول المسألة إلى إيجاد معادلة مستقيم مار بالنقطة (3 ، - 1) وعمودي على الشعاع (2 ، - 4) :

$$2(x - 3) - 4(y + 1) = 0$$

أو :

$$2x - 4y - 10 = 0$$

وبالاختصار على 2 تأخذ هذه المعادلة الشكل :

$$x - 2y - 5 = 0$$

١١٢- أوجد احداثيي النقطة M' نظير $M(1, 6)$ بالنسبة للمستقيم:

$$2x - 3y + 5 = 0$$

الحل :

لنفرض أن $M'(x', y')$ فعندئذ يكون احداثيا منتصف

MM' هما :

$$\frac{x' + 1}{2} ; \frac{y' + 6}{2}$$

ولكن هذا المنتصف يقع على المستقيم المفروض ، لذلك :

$$2 \frac{x' + 1}{2} - 3 \frac{y' + 6}{2} + 5 = 0$$

أو :

$$(1) \quad 2x' - 3y' - 6 = 0$$

ومن جهة ثانية نلاحظ أن المستقيم MM' الذي أمثاله الموجهة :

$$1 - x' \quad , \quad 6 - y'$$

عمودي على المستقيم المفروض ، فهو يوازي الناظم عليه ، أي :

$$\frac{1 - x'}{2} = \frac{6 - y'}{-3}$$

ومنه :

$$(2) \quad 3x' + 2y' - 15 = 0$$

وبحل المعادلتين (1) و (2) نجد : $x' = \frac{57}{13}$ ، $y' = \frac{12}{13}$ وهو

المطلوب .

١١٣ - اكتب معادلة المستقيم Δ نظير المستقيم :

$$(1) \quad x + 2y - 3 = 0$$

بالنسبة للمستقيم :

$$(2) \quad x - 3y + 3 = 0$$

الحل :

ان نقطة تقاطع المستقيمين (1) و (2) تقع على Δ . وبحل معادلة هذين

$$\text{المستقيمين نجد : } x = \frac{3}{5} ; y = -\frac{6}{5}$$

يكفي أن نعرف نقطة أخرى من المستقيم Δ كي نتكهن من صابة

معادلته . تأخذ نقطة ما من (١) ولتكن (٣ , ٠) ثم نعين نظيرها ، كما فعلنا في المسألة السابقة ، فيكون هذا النظير نقطة من المستقيم Δ . نفرض ان احداثي النظير هما (x' , y') فعندئذ نحصل على المعادلتين التاليتين (انظر المسألة السابقة) :

$$x' - 3 y' + 9 = 0$$

$$3x' + y' - 9 = 0$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد : $x' = \frac{9}{5}$; $y' = \frac{18}{5}$ وتكون معادلة

المستقيم الذي يصل النقطة ($\frac{3}{5}$, $\frac{6}{5}$) بالنقطة ($\frac{9}{5}$, $\frac{18}{5}$) هي :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{3}{5} & \frac{6}{5} & 1 \\ \frac{9}{5} & \frac{18}{5} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

أو :

$$y = 2x$$

وهو المطلوب .

١١٤- لدينا المثلث $A(0,0)$; $B(1,3)$; $C(5,1)$

١- أوجد احداثي نقطة التقاطع H لارتفاعات هذا المثلث .

٢- أوجد احداثي المركز ω للدائرة المارة من رؤوس المثلث .

٣- إذا كانت G نقطة تقاطع الخطوط المتوسطة فبرهن أن ω, G, H

تقع على استقامة واحدة وأن : $\vec{GH} = -2 \vec{G\omega}$

الحل :

(١) ان الأمثال الموجهة للمستقيم BC هي :

$$a = 5 - 1 = 4 \quad , \quad b = 1 - 3 = -2$$

وبما أن الارتفاع النازل من A عمودي على BC فمعادلة هذا الارتفاع هي :

$$4(x - 0) - 2(y - 0) = 0$$

أو :

$$(1) \quad 2x - y = 0$$

بطريقة مماثلة نجد معادلة الارتفاع النازل من C على AB :

$$(2) \quad x + 3y - 8 = 0$$

وبحل المعادلتين (1) و (2) نجد :

$$H \left(\frac{8}{7}, \frac{16}{7} \right)$$

(٢) ان المركز ω هو نقطة تلاقي محور القطعة AC مع محور القطعة

AB. ولكن احداثيي منتصف AC هما $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2} \right)$ والأمثال الموجهة

لـ AC هي $(5, 1)$ فمعادلة محور القطعة AC هي :

$$5 \left(x - \frac{5}{2} \right) + 1 \left(y - \frac{1}{2} \right) = 0$$

أو :

$$(3) \quad 5x + y - 13 = 0$$

بطريقة مماثلة نجد معادلة محور القطعة AB :

$$(4) \quad x + 3y - 5 = 0$$

بحل المعادلتين (1) و (2) نجد :

$$\omega \left(\frac{17}{7}, \frac{6}{7} \right)$$

(٣) ان نقطة تقاطع الخطوط المتوسطة هي مركز ثقل المثلث . وإذا كانت (x_1, y_1) و (x_2, y_2) و (x_3, y_3) إحداثيات رؤوس المثلث ، فاحداثيا مركز ثقله هما :

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} ; \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

ومنه نجد احداثي G :

$$x = 2 \quad , \quad y = \frac{4}{3}$$

وكي تقع النقط الثلاث على استقامة واحدة يلزم أن يكون :

$$\begin{vmatrix} \frac{8}{7} & \frac{16}{7} & 1 \\ \frac{17}{7} & \frac{6}{7} & 1 \\ 2 & \frac{4}{3} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

وبنشر هذا المعين وفق عناصر السطر الثالث نجد :

$$2 \left(\frac{16}{7} - \frac{6}{7} \right) - \frac{4}{3} \left(\frac{8}{7} - \frac{17}{7} \right) + 1 \left(\frac{48}{49} - \frac{272}{49} \right) = 0$$

أو

$$\frac{20}{7} + \frac{36}{21} - \frac{32}{7} = 0$$

وهذا صحيح :

ثم ان مركبي \overrightarrow{GH} هما :

$$\frac{8}{7} - 2 = \frac{-6}{7} \quad ; \quad \frac{16}{7} - \frac{4}{3} = \frac{20}{12}$$

ومر كبتا $\vec{G\omega}$ هما :

$$\frac{17}{7} - 2 = \frac{3}{7} \quad , \quad \frac{6}{7} - \frac{4}{3} = -\frac{10}{12}$$

ومنه نلاحظ :

$$\vec{GH} = -2 \vec{G\omega}$$

١١٥- $M_1 (2, 1)$ و $M_2 (4, 9)$ تمثل رأسين من رؤوس مثلث و $N (3, 4)$ تمثل نقطة تلاقي ارتفاعات هذا المثلث ، فما هي معادلات أضلاعه .

الحل :

ان معادلة الضلع $M_2 M_1$ هي :

$$\frac{x-2}{y-1} = \frac{4-2}{9-1}$$

أو :

$$4x - y - 7 = 0$$

وحيث ان الارتفاع النازل من M_1 على الضلع الثاني $M_2 M_3$ يمر بالنقطة N فأمثاله الموجهة تكون :

$$a_1 = 3 - 2 = 1 \quad b_1 = 4 - 1 = 3$$

فالضلع $M_2 M_3$ يمر اذن بالنقطة M_2 ويتعامد مع الشعاع $V_1 (1, 3)$ فعادلته اذن :

$$(x - 4) + 3(y - 9) = 0$$

أو :

$$x + 3y - 31 = 0$$

وتكون الأمثال الموجهة للارتفاع النازل من M_2 على الضلع الثالث

$M_1 M_3$ هي :

$$a_2 = 4 - 3 = 1 \quad b_2 = 9 - 4 = 5$$

والضلع $M_1 M_3$ يمر بـ M_1 ويتعامد مع الشعاع $V_2 (1, 5)$

فمعادلته :

$$x - 2 + 5 (y - 1) = 0$$

أو :

$$x + 5y - 7 = 0$$

١١٦ - معادلة قاعدة مثلث متساوي الساقين هي :

$$x + y - 1 = 0$$

ومعادلة أحد الساقين هي :

$$x - 2y - 2 = 0$$

أوجد معادلة الساق الآخر إذا علمت أن النقطة $(-2, 0)$ تقع

على هذا الساق .

الحل :

أن ميل القاعدة عن المحور ox هو :

$$m_1 = -1$$

وميل الساق عن المحور ox هو :

$$m_2 = \frac{1}{2}$$

وبذلك يكون ميل الساق عن القاعد :

$$\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} = 3$$

وبما أن المثلث متساوي الساقين فإن ميل الساق الآخر عن المحور ox ولكن m يحقق العلاقة :

$$3 = \frac{-1 - m}{1 - m}$$

ومنه نجد :

$$m = 2$$

وتكون معادلة الساق المطلوبة :

$$y = 2(x + 2)$$

أو :

$$2x - y + 4 = 0$$

١١٧ - شعاع ضوئي يمر من النقطة $(2, 3)$ ويسقط على المستقيم :

$$x + y + 1 = 0$$

وينعكس ماراً بالنقطة $(1, 1)$. أوجد معادلة الشعاع الساقط والشعاع المنعكس .

الحل :

لنفرض أن النقطة (x_1, y_1) هي النقطة التي يلاقي بها كل من الشعاع الساقط والمنعكس المستقيم المفروض .

أن هذه النقطة تحقق معادلة المستقيم المفروض أي :

$$(1) \quad x_1 + y_1 + 1 = 0$$

وتكون معادلة الشعاع الساقط (معادلة مستقيم يمر بالنقطتين

(x_1, y_1) و $(2, 3)$ هي :

$$\frac{y - 3}{x - 2} = \frac{y_1 - 3}{x_1 - 2}$$

أو بالاستفادة من (1) :

$$(2) \quad \frac{y - 3}{x - 2} = \frac{4 + x_1}{2 - x_1}$$

وتكون معادلة الشعاع المنعكس :

$$\frac{y - 1}{x - 1} = \frac{y_1 - 1}{x_1 - 1}$$

أو بالاستفادة من : (1) :

$$(3) \quad \frac{y - 1}{x - 1} = \frac{2 + x_1}{1 - x_1}$$

إلا أن ميل الشعاع الساقط عن الناظم على المستقيم المفروض يساوي ميل الناظم عن الشعاع المنعكس . وبما أن ميل الناظم هو 1 إذن :

$$\frac{\frac{4 + x_1}{2 - x_1} - 1}{1 + \frac{4 + x_1}{2 - x_1}} = \frac{1 - \frac{2 + x_1}{1 - x_1}}{1 + \frac{2 + x_1}{1 - x_1}}$$

ومنه نجد :

$$1 + x_1 = -1 - 2 x_1$$

أو :

$$x_1 = -\frac{2}{3}$$

بالتعويض في (2) نحصل على معادلة الشعاع الساقط :

$$5x - 4y + 2 = 0$$

وبالتعويض في (3) نحصل على معادلة الشعاع المنعكس :

$$4x - 5y + 1 = 0$$

١١٨ - اكتب معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

$$x + 2y - 11 = 0$$

$$2x - y - 2 = 0$$

والذي يبعد عن نقطة الاصل بالمقدار 5 .

الحل :

لنشكل معادلة الحزمة من المستقيمين المفروضين وذلك بضرب المعادلة الثانية بالوسيط λ وجمعها الى الاولى :

$$(1 + 2\lambda)x + (2 - \lambda)y - (11 + 2\lambda) = 0 \quad (١)$$

وحيث ان مستقيمي القاعدة متقاطعان فان كل مستقيمت الحزمة تمر بنقطة تقاطعها .

لنبحث عن مستقيمت الحزمة التي تبعد عن نقطة الاصل بالمقدار 5 من اجل ذلك نحسب بعد نقطة الاصل عن المستقيمت (١) فنجد :

$$\frac{|11 + 2\lambda|}{\sqrt{(1 + 2\lambda)^2 + (2 - \lambda)^2}} = 5$$

بتربيع الطرفين والاصلاح نجد :

$$121\lambda^2 - 44\lambda + 4 = 0$$

$$(11\lambda - 2)^2 = 0 \quad \text{أو}$$

اذن المستقيم الموافق للقيمة $\lambda = \frac{2}{11}$ هو الذي يبعد عن نقطة الاصل

بالمقدار 5 . لنبدل في (١) فنجد معادلة المستقيم المطلوب :

$$15x + 20y - 125 = 0$$

$$3x + 4y - 25 = 0 \quad \text{أو}$$

وحيث اننا لم نجد إلا مستقيماً واحداً يمر بالنقطة المفروضة (نقطة تقاطع المستقيمين المفروضين) ويبعد عن نقطة الاصل بالمقدار 5 ، فإن النقطة المفروضة تبعد عن نقطة الأصل 5 . لأنه لو كان بعد هذه النقطة أقل من 5 لما وجد أي مستقيم يحقق المطلوب ولو كان البعد أكبر من 5 لوجد مستقيمان .

١١٩ - ليكن لدينا المستقيم D الذي معادلته الديكارية هي :

$$(1) \quad x + 3y - 14 = 0$$

اكتب معادلتى المستقيمين اللذين يشكلان مع D مثلثاً متساوي الساقين زاوية رأسه θ وقاعدته على D ومركز ثقله النقطة $G(1, 1)$.

الحل :

بما أن قاعدة المثلث المتساوي الساقين تقع على D فإن العمود النازل من G على D ينطبق على ارتفاع المثلث . للحصول على معادلة هذا العمود نلاحظ انه يمر من G وانه عمودي على D ، أي أن أمثاله الموجهة هي (3 ، 1) فمعادلته إذن :

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{3}$$

أو :

$$(2) \quad 3x - y - 2 = 0$$

ان هذا المستقيم يلاقي القاعدة في منتصفها الذي نوزم له بـ H . للحصول على احداثي هذا المنتصف نحل المعادلتين (1) و(2) فنجد $H(2, 4)$.

واذا رمزنا بـ A لرأس المثلث ، ولاحظنا أن مركز ثقل المثلث يقسم الخط المتوسط AH بالنسبة :

$$\frac{\vec{GH}}{\vec{GA}} = -\frac{1}{2}$$

فعندئذ يكون :

$$2\vec{GH} + \vec{GA} = 0$$

أو :

$$2(\vec{oH} - \vec{oG}) + (\vec{oA} - \vec{oG}) = 0$$

ومنه :

$$\vec{oA} = 3\vec{oG} - 2\vec{oH}$$

بالاسقاط على المحورين الاحداثيين نجد :

$$x_A = 3 - 4 = -1 ; \quad y_A = 3 - 8 = -5$$

بقي ان نحسب ميل كل من ساقى المثلث . لنرمز لهذين الميلين بـ m_1 و m_2 ولنلاحظ أن الزاوية بين أحد الساقين والارتفاع تساوي θ ، وهي نفس الزاوية بين الارتفاع والساق الآخر ، وان ميل الارتفاع يساوي 3 ، اذن :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{m_1 - 3}{1 - 3m_1} ; \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{3 - m_2}{1 - 3m_2}$$

ومنه نجد :

$$m_1 = \frac{3 + \operatorname{tg} \theta}{1 + 3 \operatorname{tg} \theta} ; \quad m_2 = \frac{3 - \operatorname{tg} \theta}{1 - 3 \operatorname{tg} \theta}$$

فمعدلتنا السابقين هما :

$$y - 4 = \frac{3 + \operatorname{tg} \theta}{1 + 3 \operatorname{tg} \theta} (x - 2)$$

$$y - 4 = \frac{3 - \operatorname{tg} \theta}{1 - 3 \operatorname{tg} \theta} (x - 2)$$

١٢٠ - اكتب المعادلة الناطمية لكل من المستقيمين :

$$3x + 4y - 5 = 0 ; \quad x + y\sqrt{3} = 6$$

الحل :

ان طول الشعاع الناطم $(3, 4)$ على المستقيم الأول هو $\sqrt{9+16}=5$
وطول الشعاع الناطم $(1, \sqrt{3})$ على المستقيم الثاني هو $\sqrt{1+3}=2$
ومنه بتقسيم المعادلة الأولى على 5 والثانية على 2 نحصل على المعادلتين
الناظمتين المطلوبتين :

$$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1 = 0 ; \quad \frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2} = 3$$

١٢١ - لدينا مثلث رؤوسه النقط $A(3, 0)$ و $B(4, 2)$ و $C(0, 4)$.
نسقط النقطة $M(3, 4)$ على اضلاع هذا المثلث .
برهن أن مساقط هذه النقطة واقعة على مستقيم يطلب كتابة معادلته :

الحل :

يمكننا بسهولة أن نجد معادلات اضلاع المثلث AB و BC و CA

فنجد :

$$-2x + y + 6 = 0$$

$$x + 2y - 8 = 0$$

$$4x + 3y - 12 = 0$$

وتكون معادلات الاعمدة النازلة من النقطة $M(3, 4)$ على هذه
الاضلاع هي على الترتيب :

$$x + 2y - 11 = 0$$

$$2x - y - 2 = 0$$

$$3x - 4y + 7 = 0$$

وتكون نقاط تقاطع الاعمدة مع الاضلاع النازلة عليها هي على
الترتيب :

$$\left(\frac{23}{5}, \frac{16}{5}\right) ; \left(\frac{12}{5}, \frac{14}{5}\right) ; \left(\frac{27}{25}, \frac{64}{25}\right)$$

للبهران على أن النقط الثلاث تقع على استقامة واحدة نكتب معادلة
المستقيم المار بالنقطتين الأولى والثانية فنجد :

$$2x - 11y + 26 = 0$$

وتقع النقط الثلاث على استقامة واحدة إذا حققت النقطة الثالثة
هذه المعادلة :

$$2\left(\frac{27}{25}\right) - 11\left(\frac{64}{25}\right) + 26 = 0$$

وهذا صحيح وهو المطلوب :

١٢٢ - لدينا المستقيمان :

$$mx + (2m - 1)y + 3 = 0$$

$$(4m - 7)x - (m + 2)y - 8 = 0$$

(١) عين m لكي يتعامدا المستقيمان احسب عندئذ احداثيي نقطة
التقاطع .

(٢) عين m لكي يتوازي المستقيمان . احسب البعد بينهما

الحل :

(١) يتعامد المستقيمان عندما يكون ناظماهما متعامدين . ولكن
الأمثال الموجهة للناظم على المستقيم الأول هي $(m , 2m - 1)$ ،
والأمثال الموجهة للناظم على المستقيم الثاني هي : $(4m - 7 , -m - 2)$
فشرط التعامد هي :

$$m (4m - 7) + (2m - 1) (-m - 2) = 0$$

أو :

$$m^2 - 5m + 1 = 0$$

وبحل هذه المعادلة نجد :

$$m = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

للحصول على نقطة التقاطع نحل معادلتى المستقيمين المفروضين ونعوض
 m بقيمتها فنجد :

$$x = \frac{37 \pm 13\sqrt{21}}{141 \pm 29\sqrt{21}} ; \quad y = \frac{-58 \mp 20\sqrt{21}}{141 \pm 29\sqrt{21}}$$

(٢) ويتوازي المستقيمان إذا توازى ناظماهما وهذا يتم عندما :

$$\frac{m}{4m - 7} = \frac{2m - 1}{-m - 2}$$

أي :

$$9m^2 - 16m + 7 = 0$$

وبحل هذه المعادلة نجد القيمتين :

$$m_1 = 1 ; \quad m_2 = \frac{7}{9}$$

بالتعويض في معادلتى المستقيمين نجد من أجل القيمة الأول $m_1 = 1$:

$$x + y + 3 = 0$$

$$3x + 3y + 8 = 0$$

والبعد بين المستقيمين هو بعد نقطة من أحدهما عن المستقيم الآخر. فإذا أخذنا النقطة $(0, -3)$ من المستقيم الأول فإن بعدها عن المستقيم الثاني هو $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ وهو البعد المطلوب .

من أجل القيمة الثانية $m_1 = \frac{7}{9}$ نأخذ المعادلتان الشكل :

$$7x + 5y + 27 = 0$$

$$7x + 5y + \frac{72}{5} = 0$$

والبعد بين هذين المستقيمين هو $\frac{63}{5\sqrt{74}}$.

١٢٣ - اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-1, 2)$ وبنقطة تقاطع المستقيمين :

$$2x - 3y + 1 = 0$$

$$x + y - 4 = 0$$

الحل :

نشكل من هذين المستقيمين حزمة المستقيمتان :

$$(2 + \lambda)x + (-3 + \lambda)y + 1 - 4\lambda = 0$$

وتمثل هذه الحزمة جميع المستقيمتان المارة بنقطة تقاطع المستقيمين المفروضين . لتعيين المستقيم المطلوب نحسب قيمة λ الملائمة بتعويض إحداثيي النقطة المفروضة في معادلة الحزمة فنجد :

$$-(2 + \lambda) + 2(-3 + \lambda) + 1 - 4\lambda = 0$$

ومنه نجد $\lambda = -\frac{7}{3}$ نعوض هذه القيمة في معادلة الحزمة فنجد

المعادلة المطلوبة :

$$x + 16y - 31 = 0$$

١٢٤ - لدينا ثلاثة مستقيمت :

$$g_1 \equiv x - y + 5 = 0$$

$$g_2 \equiv 2x - 3y + 5 = 0$$

$$g_3 \equiv x - 2y = 0$$

تحقق بالاستعانة بأمثال المعادلات ان هذه المستقيمت الثلاثة تلتقي في

نقطة واحدة .

الحل :

لنبرهن أولاً ان هذه المستقيمت الثلاثة تنتمي لحزمة واحدة . من أجل ذلك يكفي ان نبرهن ان معين الأمثال معدوم :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

وبنشر المعين نجد :

$$\Delta = 1 \cdot 0 - 5 - 5 = 0$$

وحيث ان المستقيمت ليست متوازية فهي متلاقية في نقطة واحدة

١٢٥ - عين معادلة المنصف للزاوية الحادثة بين المستقيمين :

$$4x + 7y - 3 = 0$$

$$8x - y + 6 = 0$$

- ١٢٧ -

والتي تقع فيها نقطة الأصل .

الحل :

ان منصفى الزاوية الحادة من تقاطع المستقيمين المذكورين يتعينان بالمعادلتين :

$$\frac{4x + 7y - 3}{\sqrt{16 + 49}} = \pm \frac{8x - y + 6}{\sqrt{64 + 1}}$$

أو :

$$(4x + 7y - 3) = \pm (8x - y + 6)$$

ومنه تكون معادلة المنصف الأول :

$$4x - 8y + 9 = 0$$

ومعادلة المنصف الثاني :

$$4x + 2y + 1 = 0$$

ولكننا نعلم أن المستقيم $4x + 7y - 3 = 0$ يقسم المستوي الى قسمين يكون من اجل نقط احدهما :

$$4x + 7y - 3 > 0$$

ومن اجل نقط الآخر :

$$4x + 7y - 3 < 0$$

وأما نقطة الأصل فهي تقع في الجانب :

$$4x + 7y - 3 < 0$$

بالنسبة للمستقيم الأول والجانب :

$$8x - y + 6 > 0$$

بالنسبة للمستقيم الثاني .

لنأخذ الآن إحدى نقط المنصف الأول ولتكن :

$$x = -\frac{9}{4} \quad y = 0$$

فنجذ ان هذه النقطة تقع مع نقطة الأصل في الجانب :

$$4x + 7y - 3 < 0$$

بالنسبة للمستقيم الأول ، ولكن في الجانب الذي لا تقع فيه نقطة

الأصل :

$$4x - y + 6 < 0$$

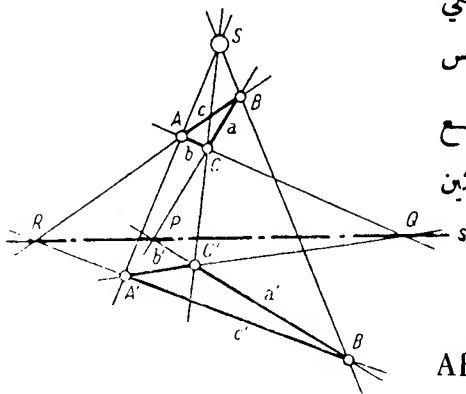
بالنسبة للمستقيم الثاني . ولذلك فالمنصف المذكور لا يقع مع نقطة

الأصل في نفس الزاوية فالمنصف الثاني :

$$4x + 2y + 1 = 0$$

هو المنصف المطلوب .

١٢٦- نظرية Desargues (مهندس فرنسي ١٥٩١ - ١٦٦١) .



إن الشرط اللازم والكافي لكي

تتلاقى المستقيمت الواصلة بين الرؤوس

المتقابلة من مثلثين هو أن تقع

نقط تلاقي الاضلاع المتقابلة في المثلثين

على استقامة واحدة .

الحل :

ليكن لدينا المثلثان ABC

و A'B'C' كما في الشكل ، ولنرمز

شكل (٧)

للأضلاع ولمعادلاتها ، بغية السهولة ، بالحروف نفسها ؛ أي أننا نرمز للأضلاع BC و CA و AB و B' C' و C' A' و A' B' بـ a و b و c و a' و b' و c' على التعاقب ونكتب معادلاتها بالشكل :

$$a \equiv A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$

$$b \equiv A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

$$c \equiv A_3 x + B_3 y + C_3 = 0$$

$$a' \equiv A'_1 x + B'_1 y + C'_1 = 0$$

$$b' \equiv A'_2 x + B'_2 y + C'_2 = 0$$

$$c' \equiv A'_3 x + B'_3 y + C'_3 = 0$$

١ - الشرط لازم : نفرض أن المستقيبات A A' و B B' و C C' متلاقية بـ S ونبرهن أن نقط تلاقي الأضلاع المتقابلة P و Q و R على استقامة واحدة وهي s .

من الواضح أن المستقيم A A' هو أحد مستقيبات الحزمة التي مستقيبا قاعدتها هما الضلعان b و c وكذلك هو أحد مستقيبات الحزمة التي مستقيبا قاعدتها هما الضلعان b' و c' ولذلك نستطيع أن نجهد λ_1 و λ_2 و λ_3 و λ_4 على شكل يكون فيه :

$$(1) \quad \lambda_1 b + \lambda_2 c \equiv \lambda_3 b' + \lambda_4 c'$$

بطريقة مماثلة نجد إذا أعدنا المناقشة من أجل كل من B B' و C C' :

$$(2) \quad \mu_1 c + \mu_2 a \equiv \mu_3 c' + \mu_4 a'$$

$$(3) \quad \nu_1 a + \nu_2 b \equiv \nu_3 a' + \nu_4 b'$$

وبما أن المستقيبات الثلاثة تنتمي لحزمة واحدة فمن الممكن أن نجد

ثلاثة أعداد α و β و γ على شكل يكون فيه :

$$\alpha (\lambda_1 b + \lambda_2 c) + \beta (\mu_1 c + \mu_2 a) + \gamma (\nu_1 a + \nu_2 b) \equiv 0$$

وهذه تكتب بالشكل :

$$(\beta \mu_2 + \gamma \nu_1) a + (\gamma \nu_2 + \alpha \lambda_1) b + (\beta \mu_1 + \alpha \lambda_2) c \equiv 0$$

من هذه العلاقة نستنتج أن، اذا لم تكن جميع الأمثال معدومة فإن الأضلاع الثلاثة a و b و c تشكل حزمة وهذا يتناقض مع كونها تشكل مثلثاً لذلك :

$$\beta \mu_2 = -\gamma \nu_1 ; \quad \gamma \nu_2 = -\alpha \lambda_1 ; \quad \beta \mu_1 = -\alpha \lambda_2$$

وبشكل مماثل نجد :

$$\beta \mu_4 = -\gamma \nu_3 ; \quad \gamma \nu_4 = -\alpha \lambda_3 ; \quad \beta \mu_3 = -\alpha \lambda_4$$

بالتعويض في (1) و (2) و (3) بعد ضرب الأولى بـ α والثانية بـ β والثالثة بـ γ نجد :

$$\alpha \lambda_1 b - \beta \mu_1 c \equiv \alpha \lambda_3 b' - \beta \mu_3 c'$$

$$\beta \mu_1 c - \gamma \nu_1 a \equiv \beta \mu_3 c' - \gamma \nu_3 a'$$

$$\gamma \nu_1 a - \alpha \lambda_1 b \equiv \gamma \nu_3 a' - \alpha \lambda_3 c'$$

ومن هذه العلاقات نستنتج أن :

$$\gamma (\nu_3 a' - \nu_1 a) \equiv \beta (\mu_3 c' - \mu_1 c) \equiv \alpha (\lambda_3 b' - \lambda_1 b)$$

وبما أن النقطة P تجعل من الطرف الأيسر يساوي الصفر والنقطة R تجعل الطرف الأوسط يساوي الصفر والنقطة Q تجعل الطرف الأيمن يساوي الصفر ، فالنقط الثلاث تقع على استقامة واحدة .

٢ - الشرط كاف : نفرض أن P و Q و R على استقامة واحدة ونبرهن أن A A' و B B' و C C' تتلاقى في نقطة واحدة S .

إن المستقيم s ينتمي للحزمة المكونة من a و a' وللحزمة المكونة من b و b' وللحزمة المكونة من c و c' لذلك نستطيع أن نجد λ و λ' و μ و μ' و ν و ν' على شكل يكون فيه :

$$\lambda a + \lambda' a' \equiv \mu b + \mu' b' \equiv \nu c + \nu' c'$$

ومنه نجد :

$$\lambda a - \mu b \equiv -\lambda' a' + \mu' b'$$

$$\mu b - \nu c \equiv -\mu' b' + \nu' c'$$

$$\nu c - \lambda a \equiv -\nu' c' + \lambda' a'$$

إن النقطة c تجعل الطرف الأيمن من العلاقة الأولى مساوياً للصفر في حين تجعل النقطة c' الطرف الأيسر مساوياً للصفر لذلك فإن معادلة المستقيم CC' هي :

$$\lambda a - \mu b = 0$$

بطريقة مماثلة نجد أن معادلة BB' هي :

$$\nu c - \lambda a = 0$$

ومعادلة AA' هي :

$$\mu b - \nu c = 0$$

ولكننا نلاحظ بسهولة أن :

$$(\lambda a - \mu b) + (\nu c - \lambda a) + (\mu b - \nu c) \equiv 0$$

وهذا يعني أن المستقيبات الثلاثة AA' و BB' و CC' تتلاقى في نقطة واحدة وهو المطلوب .

١٢٧ - ليكن المستقيم D الممثل في الاحداثيات القائمة بالمعادلة :

$$\lambda^2 x - \lambda y + \frac{a}{2} = 0$$

حيث λ وسيط متحول و a عدد ثابت . لتكن L نقطة تقاطع D مع محور العينات . برهن أن العمود المقام على D من النقطة L يمر من نقطة ثابتة P مهما كانت λ . ليكن AX و AY المستقيمين D الموافقين للقيمتين m_1 و m_2 للوسيط λ ثم Q و R نقطتي تقاطع مستقيم ما D مع AX و AY . برهن ان الزاوية (PQ , PR) ثابتة .

احسب بدلالة λ سطح المثلث AQR نأخذ من المستقيمت D تلك التي تقابل جذور المعادلة .

$$\lambda^3 - 3\lambda + k(1 - 3\lambda^2) = 0$$

برهن انها تشكل ، بوجه عام ، مثلثاً متساوي الاضلاع . اوجد المحل الهندسي لرؤوس المثلث عندما يتحول k .

الحل :

من اجل حساب احداثيات L نبدل في معادلة المستقيم D كل x بصفر فنجد :

$$L(0, \frac{a}{2\lambda})$$

وبما ان امثال توجيه العمودي على D هي :

$$(\lambda^2, -\lambda)$$

فان معادلة العمود المقام على D من النقطة L هي :

$$\frac{Y - \frac{a}{2\lambda}}{-\lambda} = \frac{X - 0}{\lambda^2}$$

أو :

$$\lambda Y + X = \frac{a}{2}$$

من هذه المعادلة نرى ان هذا العمودي يمر بالنقطة الثانية (0 , $\frac{a}{2}$) P ممها كانت قيمة λ .

إن معادلة المستقيم AX هي :

$$m_1^2 x - m_1 y + \frac{a}{2} = 0$$

ومعادلة المستقيم AY هي :

$$m_2^2 x - m_2 y + \frac{a}{2} = 0$$

لتكن Q نقطة تقاطع المستقيم المتحول D مع AX . ان احداثي هذه النقطة تعينان بالمعادلتين :

$$\lambda^2 x - \lambda y + \frac{a}{2} = 0$$

$$m_1^2 x - m_1 y + \frac{a}{2} = 0$$

بحل هاتين المعادلتين نجد :

$$x = \frac{a}{2\lambda m_1} \quad y = \frac{a(\lambda + m_1)}{2\lambda m_1}$$

بطريقة مماثلة نجد احداثيات النقطة R ، نقطة تقاطع D مع AY

$$x = \frac{a}{2 \lambda m_2} \quad y = \frac{a (\lambda + m_2)}{2 \lambda m_2}$$

ويكون ميل المستقيم PQ هو :

$$\frac{\lambda + m_1}{1 - \lambda m_1}$$

وميل المستقيم PR هو :

$$\frac{\lambda + m_2}{1 - \lambda m_2}$$

ويكون ظل الزاوية (PQ ، PR) هو :

$$\frac{\frac{\lambda + m_2}{1 - \lambda m_2} - \frac{\lambda + m_1}{1 - \lambda m_1}}{1 + \frac{(\lambda + m_2)(\lambda + m_1)}{(1 - \lambda m_1)(1 - \lambda m_2)}} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

وحيث أن ظل الزاوية المذكورة لاعلاقة له بالوسيط المتحول λ فالزاوية ثابتة .

هذا ويمكن البرهان على ان الزاوية (PQ ، PR) ثابتة بشكل آخر .

لما كانت مساقط النقطة P على المستقيمت AX ، AY ، D واقعة على استقامة ثابتة وهي المحور oy فان النقطة P تقع على الدائرة المارة برؤوس المثلث AQR ولذلك فإن الزاوية المفروضة تكمل أو تساوي الزاوية الثابتة (AX ، AY) .

لحساب سطح المثلث AQR نعلم أن إحداثيات النقطة Q هي :

$$\left(\frac{a}{2 \lambda m_1}, \frac{a (\lambda + m_1)}{2 \lambda m_1} \right)$$

وإحداثيات النقطة R هي :

$$\left(\frac{a}{2 \lambda m_2}, \frac{a (\lambda + m_2)}{2 \lambda m_2} \right)$$

بالطريقة نفسها نجد إحداثيات النقطة A من تقاطع المستقيمين AX

AY فنجد :

$$\left(\frac{a}{2 m_1 m_2}, \frac{a (m_1 + m_2)}{2 m_1 m_2} \right)$$

ويكون لذلك مركبتا AR هما :

$$\left[\frac{a (m_1 - \lambda)}{2 \lambda m_1 m_2}, \frac{a (m_1 - \lambda)}{2 \lambda m_1} \right]$$

ومركبتا AQ هما :

$$\left[\frac{a (m_2 - \lambda)}{2 \lambda m_1 m_2}, \frac{a (m_2 - \lambda)}{2 \lambda m_2} \right]$$

ولكن سطح المثلث AQR يعطى بنصف طول الجداء الهندسي

للشعاعين AR و AQ لذلك فإن :

$$s = \frac{1}{2} \left| \left[\frac{a (m_1 - \lambda)}{2 \lambda m_1 m_2} \cdot \frac{a (m_2 - \lambda)}{2 \lambda m_2} - \frac{a (m_1 - \lambda)}{2 \lambda m_1} \cdot \frac{a (m_2 - \lambda)}{2 \lambda m_1 m_2} \right] \right|$$

ومنه :

$$s = \left| \frac{a^2 (m_1 - m_2) (m_1 - \lambda) (m_2 - \lambda)}{8 \lambda^2 m_1^2 m_2^2} \right|$$

لنتقل بعد ذلك إلى برهان أن المستقيمات التي تقابل جذور المعادلة :

$$(1) \quad \lambda^3 - 3 \lambda + k (1 - 3 \lambda^2) = 0$$

تشكل مثلثاً متساوي الاضلاع .

من أجل ذلك لنفرض أن جذور المعادلة (١) هي α ، β ، γ فعندئذ يكون :

$$(2) \quad \alpha + \beta + \gamma = 3 k$$

$$\alpha \beta + \beta \gamma + \gamma \alpha = - 3$$

$$\alpha \beta \gamma = - k$$

فاذا لاحظنا أن ميل المستقيم D هو λ فعندئذ تكون α ، β ، γ عبارة عن ميول اضلاع المثلث المذكور .

وحتى يكون هذا المثلث متساوي الساقين يلزم أن يكون ميل احد الاضلاع (وليكن ذلك الذي ميله α) عن ضلع ثان (وليكن ذلك الذي ميله β) يساوي ميل هذا الضلع عن الضلع الثالث (الذي ميله γ) إذن :

$$\frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha \beta} = \frac{\beta - \gamma}{1 + \beta \gamma}$$

وماصلاح هذه العلاقة يمكن كتابتها على الشكل :

$$3 \alpha \beta \gamma + (\alpha + \beta + \gamma) = \beta (3 + \alpha \beta + \beta \gamma + \gamma \alpha)$$

ولكن استناداً الى العلاقات (2) نرى تحقق هذه العلاقة . فالمثلث المذكور متساوي الساقين قاعدته الضلع الذي ميله β . وبطريقة مماثلة يمكن برهان أن المثلث متساوي الساقين قاعدته الضلع الذي ميله α فالمثلث متساوي اضلاع .

لنتنقل اخيراً لاجيجاد معادلة المحل الهندسي لرؤوس المثلث عندما يتحول k . من أجل ذلك لنحسب احداثيات أحد الرؤوس وليكن ذلك الذي ينتج عن تقاطع المستقيمين الموافقين للقيمتين α و β :

$$\alpha^2 x - \alpha y + \frac{a}{2} = 0$$

$$\beta^2 x - \beta y + \frac{a}{2} = 0$$

بحل هاتين المعادلتين نجد :

$$x = \frac{a}{2 \alpha \beta} \quad y = \frac{a (\alpha + \beta)}{2 \alpha \beta}$$

واستناداً إلى العلاقات (2) نجد :

$$(3) \quad x = - \frac{-a \gamma}{2 k} \quad y = \frac{-a \gamma (3 k - \gamma)}{2 k}$$

ولما كانت γ إحدى جذور المعادلة (١) فان :

$$k = \frac{3\gamma - \gamma^3}{1 - 3\gamma^2}$$

لنبدل في (3) فنجد :

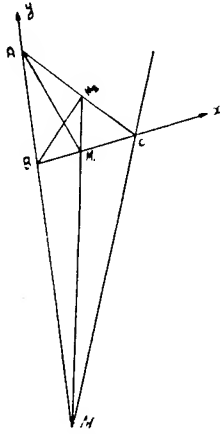
$$x = \frac{a(3\gamma^2 - 1)}{2(3 - \gamma^2)} \quad y = \frac{4a\gamma}{\gamma - 3}$$

وبحذف الوسيط γ بين هاتين المعادلتين نجد :

$$4y^2 - 12x^2 - 20ax - 3a^2 = 0$$

وبسهولة نستطيع التأكد أن الرأسين الآخرين يرسمان المنحني نفسه .

١٢٨ - ليكن لدينا المثلث ABC . وليكن M_1 نقطة تقاطع المنصف الداخلي لـ A مع الضلع المقابل BC و M_2 نقطة تقاطع المنصف الداخلي لـ B مع الضلع المقابل AC و M_3 نقطة تقاطع المنصف الخارجي لـ C مع امتداد الضلع المقابل AB .



شكل (٨)

برهن أن النقط الثلاث تقع على استقامة واحدة .

الحل :

لنتخذ B مبدأ لمجموعة محاور مائلة ينطبق فيها المحوران على AB و BC . فإذا كانت أطوال أضلاع المثلث AB و BC و CA على التوالي c و a و b فعندئذ تكون معادلة الضلع AC هي .

(1)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{c} = 1$$

واما معادلة المنصف BM_2 فهي :

$$(2) \quad x = y$$

واحدانياً النقطة M_2 نحصل عليها بحل المعادلتين (1) و (2) فنجد

$$M_2 \left(\frac{a c}{a + c}, \frac{a c}{a + c} \right)$$

ولحساب إحداثيي النقطة M_1 نلاحظ حسب نظريات المنصف الداخلي في مثلث :

$$\frac{B M_1}{M_1 C} = \frac{c}{b}$$

ومنه بإضافة الصور إلى الخارج نجد :

$$\frac{B M_1}{a} = \frac{c}{b + c}$$

وحيث ان النقطة M_1 تقع على المحور Bx فإن إحداثيها هما :

$$M_1 \left(\frac{a c}{b + c}, 0 \right)$$

بنفس الطريقة نجد إحداثيات النقطة M_3 :

$$M_3 \left(0, \frac{a c}{a - b} \right)$$

واما معادلة المستقيم الذي يصل النقطة M_1 بالنقطة M_3 فهي :

$$\frac{\frac{x}{a c}}{\frac{b + c}{a - b}} + \frac{\frac{y}{a c}}{\frac{a c}{a - b}} = 1$$

$$(b + c)x + (a - b)y = ac \quad \text{أو :}$$

ولكن النقطة M_2 تقع على هذا المستقيم لأنه بتبديل احداثياتها في هذه المعادلة نجد :

$$\frac{(b + c)ac}{a + c} + \frac{(a - b)ac}{a + c} = ac$$

$$(b + c) + (a - b) = (a + c) \quad \text{أو :}$$

وهو المطلوب .

١٢٩ - عين الزاوية المحصورة بين المستقيمين الممثلين بالمعادلة :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$$

اوجد الشرط الذي من اجله يتعامد هذان المستقيمان .

اكتب معادلة منصفات الزاوية الحادة بين المستقيمين .

الحل :

ان المعادلة المذكورة تمثل معادلة مستقيمين مارين بالمبدأ ، وذلك لأنه يمكن بوجه عام تحليل الطرف الايسر الى جداء عاملين من الدرجة الاولى في x و y .

ولما كانت معادلة المستقيم المار بالمبدأ من الشكل :

$$\frac{y}{x} = m$$

فان ميلي المستقيمين المفروضين يعطى بالعلاقة :

$$A + 2Bm + Cm^2 = 0$$

من هذه العلاقة نرى ، إذا كان m_1 و m_2 جذري هذه المعادلة فإن :

$$m_1 + m_2 = - \frac{2B}{C}$$

$$(1) \quad m_1 \cdot m_2 = \frac{A}{C}$$

$$m_1 - m_2 = \frac{\pm 2\sqrt{B^2 - AC}}{C}$$

ولما كان بماس الزاوية V المحصورة بين مستقيمين ميلها m_1 و m_2 تعطى بالعلاقة :

$$\operatorname{tg} V = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

لذلك يكون :

$$\operatorname{tg} V = \frac{\pm 2\sqrt{B^2 - AC}}{A + C}$$

وحى يتعامد المستقيمان المفروضان يلزم ان يكون $V = \frac{\pi}{2}$ وهذا يتم إذا كان :

$$A + C = 0$$

لنفرض أخيراً m' ميل المنصف للزاوية الحادثة بين المستقيمين ، فعندئذ يلزم أن يكون ظل الزاوية المحصورة بين المنصف وأحد المستقيمين يساوي ظل الزاوية المحصورة بين المستقيم الآخر وهذا المنصف . لذلك يلزم :

$$\frac{m_1 - m'}{1 + m_1 m'} = \frac{m' - m_2}{1 + m' m_2}$$

وبإصلاح هذه العلاقة نجد :

$$(m_1 + m_2) m'^2 + 2(1 - m_1 m_2) m' - (m_1 + m_2) = 0$$

وبما ان المنصفات تمر بالمبدأ ، أي أن معادلتها من الشكل :

$$\frac{y}{x} = m'$$

واستناداً إلى العلاقات (١) نجد :

$$-\frac{2B}{C} \frac{y^2}{x^2} + 2\left(1 - \frac{A}{C}\right) \frac{y}{x} + \frac{2B}{C} = 0$$

ومنه :

$$B(y^2 - x^2) + (A - C)xy = 0$$

وهي معادلة المنصفات المطلوبة

١٣٠ - برهن أن المعادلة :

$$\frac{b}{r} + \cos \theta = \cos (\theta - \alpha)$$

تمثل مستقيماً . أوجد بعده عن القطب

أوجد نقط تقاطع المستقيم المذكور مع المستقيم .

$$\frac{b}{r} + \cos \theta = \cos (\theta - \beta)$$

الحل :

من معادلة المستقيم الأول نجد :

$$\frac{b}{r} = \cos (\theta - \alpha) - \cos \theta = 2 \sin \left(\theta - \frac{\alpha}{2} \right) \sin \frac{\alpha}{2}$$

ومنه :

$$r = \frac{\frac{b}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}}{\cos \left(\theta - \frac{\alpha + \pi}{2} \right)}$$

وهذه هي المعادلة القطبية للمستقيم الذي يبعد عن القطب بالمقدار :

$$\frac{b}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

وتقاطع المستقيمين يعني اشتراكهما بنقطة . فإذا افترضنا ان

الاحداثيات القطبية لنقطة التقاطع هي θ_1, r_1 فعندئذ يكون :

$$(1) \quad \frac{b}{r_1} + \cos \theta_1 = \cos (\theta_1 - \alpha)$$

$$\frac{b}{r_1} + \cos \theta_1 = \cos (\theta_1 - \beta)$$

ومن هاتين المعادلتين نجد :

$$\cos (\theta_1 - \alpha) = \cos (\theta_1 - \beta)$$

والحل المقبول لهاتين المعادلتين هو :

$$\theta_1 - \alpha = -\theta_1 + \beta$$

ومنه :

$$\Theta_1 = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

وبالتبديل باحدى المعادلتين (١) نجد :

$$r_1 = \frac{b}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}$$

مسائل ومغارب غير محلولة

١٣١ - النقط $A(-7, 1)$ و $B(-1, 3)$ و $C(-3, 5)$ هي

رؤوس المثلث ABC والنقطة F هي منتصف الضلع AB والنقطة E هي منتصف الضلع AC أوجد :

(١) احداثي كل من F و E .

(٢) معادلي EF و BC .

(٣) معادلة العمود النازل من A على BC

١٣٢ - احسب أبعاد النقطة $A(2, 1)$ عن المستقيمات :

$$3x + 4y - 2 = 0$$

$$4x - 3y + 3 = 0$$

$$5x - 2 = 0$$

ماهو وضع النقطة A بالنسبة للمثلث المتشكل من هذه المستقيمات الثلاثة .

١٣٣ - من نقطة تقاطع المستقيمين :

$$x - y - 1 = 0$$

$$x + 2y - 2 = 0$$

ومن النقطة $(-1, 1)$ يمر مستقيم . اكتب معادلته .

١٣٤ - اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-1, 1)$ إذا علمت

أن منتصف القطعة التي يحددها عليه المستقيمان :

$$x + 2y - 1 = 0$$

$$x + 2y - 3 = 0$$

تقع على المستقيم :

$$x - y - 1 = 0$$

١٣٥ - عين المستقيمت المارة بنقطة الاصل ، إذا علمت ان طول

القطعة التي يحددها المستقيمان :

$$x - y + 1 = 0$$

$$x - y - 2 = 0$$

مع كل من المستقيمت المطلوبة يساوي 3 .

١٣٦ - النقط الثلاث $(1, 2)$ ، $(1, 1)$ ، $(2, 1)$ تشكل

رؤس مثلث .

اوجد معادلة المنصف الداخلي لهذا المثلث في الرأس $(1, 1)$

١٣٧ - اذا علمت أن معادلتى ساقين من اضلاع مثلث متساوي

الساقين هي :

$$2x - y + 8 = 0$$

$$x - 2y - 12 = 0$$

واذا علمت ان النقطة (4 . 0) تقع على الضلع الثالث فما هي معادلة هذا الضلع .

١٣٨ - تقع اضلاع مثلث على المستقيمت :

$$2x - 3y + 4 = 0$$

$$x + y + 3 = 0$$

$$5x - 4y - 20 = 0$$

أوجد معادلات ارتفاعات هذا المثلث دون أن تستعين باحداثيات رؤوسه .

١٣٩ - المستقيم :

$$2x + y - 1 = 0$$

هو احد المنصفات الداخلية لمثلث والنقطتان $B(1, 2)$ ، $C(-1, -1)$ هما رأسان من رؤوس المثلث غير واقعين على المنصف المذكور . فما هي احداثيات الرأس الثالث A .

١٤٠ - لدينا المثلث ABC ، $A(1, 1)$ ، $B(5, 4)$ والمستقيم :

$$2x - y - 1 = 0$$

هو احد المنصفات الداخلية للمثلث . اوجد معادلات اضلاع المثلث إذا علمت أن سطحه يساوي 5 .

١٤١ - برهن ان مجموع ابعاد اي نقطة داخلية في مثلث متساوي

الاضلاع عن اضلاع المثلث يساوي مقداراً ثابتاً

١٤٢ - ليكن لدينا حزمة المستقيمت :

$$y = m x - \frac{p (1 + m^2)}{2 m}$$

p طول مفروض و m وسيط متحول . برهن انه ير في كل نقطة $M (x_0, y_0)$ ، ضمن شرط معين ، مستقيمتان من مستقيمت الحزمة . ماهو هذا الشرط . عين المحل الهندسي للنقطة M التي من اجلها يتعامد المستقيمتان ، وكذلك المحل الهندسي للنقطة M التي من اجلها يصنع المستقيمتان زاوية مفروضة V . اكتب المعادلة القطبية للمنجني الاخير .

١٤٣ - مستقيم يقطع الضلعين AB و CB لمثلث في النقطتين M و N وامتداد الضلع AC في النقطة P . برهن أن :

$$AM \cdot BN \cdot CP = AP \cdot BM \cdot CN$$

الاجوبة

$$F (-4, 2) ; E (-5, 3) \quad (١) - ١٣١$$

$$x + y + 2 = 0 ; x + y - 2 = 0 \quad (٢)$$

$$x - y + 8 = 0 \quad (٣)$$

١٣٢ - النقطة A تبعد عن المستقيمت الثلاثة نفس البعد $\frac{8}{5}$. ولذلك

فهي ملتقى منصفات المثلث .

$$2x + 7y - 5 = 0 \quad - ١٣٣$$

$$2x + 7y = 5 \quad - ١٣٤$$

$$x = 0 ; y = 0 \quad - ١٣٥$$

$$x = y \quad - \quad 136$$

$$y = \pm(x - 4) \quad - \quad 137$$

$$; 7x - 7y - 16 = 0 ; \quad 27x + 18y + 46 = 0 \quad - \quad 138$$

$$20x + 25y + 62 = 0$$

$$A \left(-\frac{13}{5} ; \frac{31}{5} \right) \quad - \quad 139$$

$$x = 1 \quad ; \quad 3x - 4y + 1 = 0 ; \quad x - 8y + 27 = 0 \quad - \quad 140$$

$$y_0^2 + p(2x_0 - p) \geq 0 \quad - \quad 141$$

$$x_0 = p$$

$$x_0^2 + y_0^2 = \frac{1}{\cos^2 v} (p - x_0)^2$$

$$r = \frac{p}{\cos v + \cos \theta}$$

الفصل الرابع

المستوي والمستقيم في الفراغ

١ - كل مستو يمثل بمعادلة من الدرجة الأولى في الاحداثيات الديكارتية x, y, z لنقطة منه ، وبالعكس كل معادلة من الدرجة الأولى في x و y و z تمثل مستوياً في الفراغ :

$$(1) \quad P \equiv ax + by + cz + d = 0$$

٢ - المعادلة الشعاعية لمستو يمر بنقطة $M_0 (x_0, y_0, z_0)$ ويوازي شعاعين $V_1 (a_1, b_1, c_1)$ و $V_2 (a_2, b_2, c_2)$.

$$(\overrightarrow{M_0 M}, \overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}) = 0 \quad \text{هي :}$$

$$M_0 M = \varrho \overrightarrow{V_1} + \lambda \overrightarrow{V_2} \quad \text{أو :}$$

يسمى ϱ و λ وسيطي المستوي .

والمعادلات الوسيطة هي :

$$x = x_0 + \varrho a_1 + \lambda a_2$$

$$y = y_0 + \varrho b_1 + \lambda b_2$$

$$z = z_0 + \varrho c_1 + \lambda c_2$$

والمعادلة الديكارتية هي :

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

٣ - معادلة المستوي المار من النقط الثلاث $M_1 (x_1, y_1, z_1)$ و $M_2 (x_2, y_2, z_2)$ و $M_3 (x_3, y_3, z_3)$ هي :

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

٤ - معادلة المستوي المعين بنقطتين ومنحى هي :

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

٥ - معادلة المستوي المار بالنقطة M_0 والمعمودي على المنحى المعين بالشعاع

\vec{V} هي :

$$\vec{M_0M} \cdot \vec{V} = 0$$

وديكارتيًا :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

من هذه المعادلة نرى أن أمثال x و y و z في معادلة المستوي هي أمثال
توجيه الناظم على هذا المستوي .

وإذا كان \vec{V} شعاع واحدة فعندئذ نحصل على المعادلة الناقصية للمستوي .

$$(x - x_0) \cos \alpha + (y - y_0) \cos \beta + (z - z_0) \cos \gamma = 0$$

α و β و γ هي الزوايا التي يصنعها الناظم على المستوي مع المحاور الاحداثية .

٦ - بعد النقطة $M_0 (x_0, y_0, z_0)$ عن المستوي (١) هو :

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

٧ - كل مستوي (١) يقسم الفراغ إلى قسمين يكون من أجل نقط احدهما

$$P > 0 \text{ ويكون من أجل نقط الآخر } P < 0 .$$

٨ - معادلات المنصفات للزوايا الحادة بين المستويين :

$$(2) \quad \begin{cases} P \equiv ax + by + cz + d = 0 \\ Q \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

$$\frac{P}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \pm \frac{Q}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} : \text{ هي}$$

٩ - يتقاطعان المستويان (٢) إذا لم يكن :

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$$

ويتوازيان إذا كان .

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} \neq \frac{d}{D}$$

وينطبقان إذا كان :

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = \frac{d}{D}$$

١٠ - إذا كان لدينا المستويان (2) ، فالتنا نسمي مجموعة المستويات التي
مماثلتها .

$$(3) \quad P + \lambda Q = 0$$

حيث λ يمثل وسيطاً متحولاً ، حزمة مستويات خطية ونسعى المستويين
 P و Q مستويي القاعدة . فإذا كان المستويان (2) متقاطعين بفصل مشترك
فان المستويات (3) جميعها تمر بهذا الفصل المشترك وإذا كان المستويان (2)
متوازيين فان (3) توازيها وإذا كانا منطبقين فان جميع المستويات (3)
تنطبق عليها .

١١ - لكي تتقاطع ثلاثة مستويات في نقطة يجب ان يكون معين الامثال
مخالفاً للصفر .

١٢ - المعادلة الشعاعية للمستقيم في الفراغ المار بالنقطة $M_0 (x_0, y_0, z_0)$
والموازي للشعاع $\vec{V}(a, b, c)$ هي :

$$\vec{M_0M} = \rho \vec{V}$$

والمعادلات الوسيطة هي :

$$x = x_0 + a \rho$$

$$y = y_0 + b \rho$$

$$z = z_0 + c \rho$$

والمعادلات الديكارية هي :

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

نسمي هذا الشكل بالشكل العام لمعادلة مستقيم في الفراغ .

وإذا كان المستقيم ماراً بنقطتين مفروضتين $M_0 (x_0, y_0, z_0)$ و $M_1 (x_1, y_1, z_1)$ فعندئذ نحصل على معادلاته بتعويض a و b و c في المعادلات السابقة و $x_1 - x_0$ و $y_1 - y_0$ و $z_1 - z_0$ على الترتيب . كذلك يمكن كتابة معادلاته الوسيطة بالشكل :

$$x = \frac{x_0 + \lambda x_1}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_0 + \lambda y_1}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_0 + \lambda z_1}{1 + \lambda}$$

١٣ - يتعين المستقيم في الفراغ كذلك بتقاطع مستويين مثل :

$$P \equiv a x + b y + c z + d = 0$$

$$Q \equiv A x + B y + C z + D = 0$$

ان امثال توجيه هذا المستقيم هي :

$$b C - c B, \quad c A - a C, \quad a B - b A$$

١٤ - زاوية المستقيم الذي امثال توجيهه (a, b, c) مع المستوي (2)

تعطى بالعلاقة :

$$\sin \theta = \frac{|a A + b B + c C|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

١٥ بعد نقطة M_1 عن مستقيم معين بنقطة منه M_0 وبالشعاع \vec{V} يعطى

بالعلاقة :

$$d = \frac{|\vec{V} \wedge \vec{M_0 M_1}|}{|\vec{V}|}$$

اما إذا تعين المستقيم بمستويين متقاطعين فاننا نبحت عن مستويين متعامدين من

مستويات الحزمة المتشكلة من هذين المستويين ثم نحسب بعد النقطة عن كل من هذين المستويين ، فإذا كان d_1 و d_2 هذين البعدين فعندئذ يكون بعد النقطة المفروضة عن المستقيم ممطى بالملاقة :

$$d^2 = d_1^2 + d_2^2$$

١٦ - إذا كان لدينا مستقيم معين بالنقطة M_0 والشعاع $\vec{V}(a, b, c)$ فإن هذا المستقيم إما أن يقطع المستوي الذي تكون الأمثال الموجهة للعمودي عليه هي (A, B, C) إذا كان :

$$aA + bB + cC \neq 0$$

ويوازيه إذا كان .

$$(4) \quad aA + bB + cC = 0$$

والنقطة M_0 ليست من المستوى المفروض .

وينطبق عليه إذا تحقق الشرط (4) وكانت النقطة M_0 من المستوي :

١٧ - إذا كان لدينا مستقيمان في الفراغ ، يمر أحدهما بالنقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$

ويوازي الشعاع $\vec{V}(a, b, c)$ ويمر الثاني بالنقطة $M_1(x_1, y_1, z_1)$

ويوازي الشعاع $\vec{V}'(a', b', c')$ فإن الشرط اللازم والكافي لكي يقع هذان المستقيمان في مستو واحد هو أن يكون :

$$(5) \quad (\vec{M_0M_1}, \vec{V}, \vec{V}') = 0$$

ولكي يتقاطع المستقيمان يجب أن ينحقق الشرط (5) وأن يكون المستقيمان

غير متوازيين ، أي أن يكون \vec{V} غير مرار لـ \vec{V}' ، أي أن لا يكون :

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

مسائل وتمارين محلولة

- ١٤٤ - اكتب معادلة المستوي المار بالنقط الثلاث $(2, 0, 0)$ ، $(0, 0, 4)$ ، $(0, -3, 0)$.

الحل :

ان معادلة المستوي المطلوب هي (حسب ٣) :

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

وبنشر هذا المعين نجد :

$$-12x + 8y - 6z + 24 = 0$$

- ١٤٥ - اكتب معادلة المستوي المار بالنقطتين $(1, 1, 1)$ ، $(2, 2, 2)$ والعمودي على المستوي :

$$x + y - z = 0$$

الحل :

ان الأمثال الموجهة للناظم على المستوي المفروض هي $\vec{v}(1, 1, -1)$ وبذلك يؤول المطلوب إلى تعيين مستو مار بنقطتين ويوازي شعاعاً معلوماً فالمعادلة المطلوبة هي « حسب ٤ » :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

وبنشر هذا المعين نجد :

$$x - y = 0$$

١٤٦ - اكتب معادلة المستوي المار بالنقطة (1 , - 1 , 1) والعمودي على المستويين

$$x - y + z - 1 = 0$$

$$2x + y + z + 1 = 0$$

الحل :

ان الأمتال الموجبة للناظم على المستوي الأول هي $V_1 (1 , - 1 , 1)$ وبذلك والأمتال الموجبة للناظم على المستوى الثاني هي $V_2 (2 , 1 , 1)$ ، وبذلك آلت المسألة إلى تعيين المستوي المار بالنقطة المفروضة والموازي للشعاعين \vec{V}_1 و \vec{V}_2 ، فحسب (٢) نجد :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

وبنشر هذا المعين نجد :

$$- 2x + y + 3z = 0$$

١٤٧ - اكتب معادلة المستوي المار بمبدأ الاحداثيات والعمودي على المستقيم الواصل بين النقطتين $A(1, 1, 0)$ و $B(0, 0, 2)$. ثم اكتب معادلة المستوي المار بالمستقيم AB والموازي للمحور ox .

الحل :

من الواضح أن الأمثال الموجهة للمستقيم AB هي :

$$a = 1 - 0 = 1; \quad b = 1 - 0 = 1; \quad c = 0 - 2 = -2$$

فمعادلة المستوي المار بمبدأ الاحداثيات والعمودي على المستقيم AB هي :

$$1(x - 0) + 1(y - 0) - 2(z - 0) = 0$$

أو :

$$x + y - 2z = 0$$

واما المستوي المار بالمستقيم AB والموازي للمحور ox فهو يمر بالنقطة A وبوازي AB أي بوازي الشعاع $(1, 1, -2)$ ، كما أنه بوازي محور السينات أي بوازي الشعاع $(1, 0, 0)$ فمعادلته هي :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

وبنشر هذا المعين وفق عناصر السطر الثالث نجد :

$$-2(y - 1) - 1(z - 0) = 0$$

أو :

$$2y + z - 2 = 0$$

١٤٨ - اكتب معادلة المستوي الموازي للمحور oy والماثل للمستقيم Δ الكائن في المستوي xoz والممثل في هذا المستوي بالمعادلة :

$$(1) \quad 2x - z + 3 = 0$$

الحل :

إن المعادلة (١) هي المعادلة المطلوبة لأنها تمثل في الفراغ مستويًا يوازي oy ويمر بالمستقيم Δ في المستوي xoz .

يمكن التأكد من الجواب بشكل آخر : إن الأمثال الموجهة للمستقيم (١) هي (١ , ٠ , ٢) لأنه يمكن كتابة معادلتها هذا المستقيم في الفراغ بالشكل :

$$\frac{x - 0}{1} = \frac{y - 0}{0} = \frac{z - 3}{2}$$

والأمثال الموجهة للمحور oy هي (٠ , ١ , ٠) ، وإذا أخذنا نقطة ما من Δ ولتكن (٠ , ٠ , ٣) فعندئذ يمر المستوي المطلوب بهذه النقطة ويوازي الشعاعين (١ , ٠ , ٢) و (٠ , ١ , ٠) فمعادلته :

$$\begin{vmatrix} x - 0 & y - 0 & z - 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

وينشر هذا المعين وفق عناصر السطر الثالث نجد :

$$2x - z + 3 = 0$$

وهو المطلوب .

١٤٩ - نرسم من مبدأ الاحداثيات o أنصاف المستقيمات oA و oB و oC التي أمثلها الموجهة هي :

$$(a, b, c) ; (a', b', c') ; (a'', b'', c'')$$

اكتب معادلة المستوي P المار بـ oA والعمودي على BOC . ثم اكتب معادلة المستوي Q المار بـ oA والعمودي على المستوي P

الحل :

ان الأمثال الموجهة للناظم على المستوي BoC هي :

$$\alpha = b'c'' - c'b'' ; \beta = c'a'' - a'c'' ; \gamma = a'b'' - b'a''$$

فالمستوي P يمر بمبدأ الاحداثيات ويوازي الشعاعين (a, b, c) و (α, β, γ) فمعادلته هي :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

وبنشر هذا المعين وفق عناصر السطر الأول نجد :

$$(c\beta - b\gamma)x + (a\gamma - c\alpha)y + (b\alpha - a\beta)z = 0$$

وأما المستوي Q فهو يوازي الناظم على المستوي (1) كما انه يوازي الشعاع (a, b, c) ويمر بمبدأ الاحداثيات فمعادلته هي :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ (c\beta - b\gamma) & (a\gamma - c\alpha) & (b\alpha - a\beta) \end{vmatrix} = 0$$

ويمكن نشر هذا المعين بسهولة فنحصل على شكل آخر للمعادلة .
١٥٠ - عين الزوايا التي يصنعها العمود النازل من 0 على المستوي :

$$x - 2y + z - 1 = 0$$

مع المحاور الاحداثية :

الحل :

إن أمثال توجيه الناظم على هذا المستوي هي (1 , - 2 , 1) فجيوب

تمام توجيهه هي $(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$. فاذا كانت α و β و γ

الزوايا التي يصنعها العمودي النازل من 0 على المستوي مع المحاور
الاحداثية فان :

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}, \cos \beta = -\frac{2}{\sqrt{6}}, \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

١٥١ - عين المستقيبات التي تنتج من تقاطع المستوي :

$$(1) \quad x + 3y - 2z - 5 = 0$$

مع المستويات الاحداثية .

الحل :

إن المستوي oxy يعطى بالمعادلة $z = 0$ ؛ فلكي نحصل
على تقاطع هذا المستوي مع المستوي (1) نعوض في المستوي الأخير

$z = 0$ فنجد :

$$x + 3y = 5$$

وللحصول على معادلة المستقيمين حيث يتقاطع (1) مع المستويين

oxy و oxz يكفي أن نعوض على الترتيب $x = 0$ و $y = 0$ في (1)

فنجد :

$$3y - 2z = 5 ; \quad x - 2z = 5$$

١٥٢ - احسب زاوية المستويين :

$$2x + y - 2z = 4$$

$$3x + 6y - 2z = 12$$

الحل :

إن زاوية المستويين تساوي أو تكمل الزاوية المحصورة بين ناظميها .
ولكن امثال توجيه الناظم على المستوي الأول هي (2 , 1 , - 2)
وامثال توجيه الناظم على المستوي الثاني هي (2 , 6 , - 2) وبالتالي
تعطى زاوية المستويين θ بالعلاقة :

$$\cos \theta = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 6 - 2 \cdot (-2)}{\sqrt{4 + 1 + 4} \cdot \sqrt{9 + 36 + 4}} = \frac{16}{21}$$

١٥٣ - هل تقع النقطتان (2 , 1 , 1) و (2 , 1 , 3) في جانب
واحد من المستوي .

$$x + 2y - z - 2 = 0$$

الحل :

نعلم أن المستوي يقسم الفراغ إلى قسمين يكون من أجل نقط
احدهما :

$$(1) \quad x + 2y - z - 2 > 0$$

ومن أجل نقط الآخر :

$$(2) \quad x + 2y - z - 2 < 0$$

وبما أن النقطة الأولى تحقق (1) والنقطة الثانية تحقق (2) فالنقطتان
واقعتان في جانبيين مختلفين من المستوي .
١٥٤ - ابحث عن المستوي المصنف لزاوية المستويين :

$$P \equiv x + 2y - z - 1 = 0$$

$$Q \equiv x + 2y + z + 1 = 0$$

التي تقع فيها النقطة $(5, -1, 1)$

الحل :

إن منصفات الزوايا الحادثة من تقاطع المستويين المفروضين هي :

$$\frac{x + 2y - z - 1}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \mp \frac{x + 2y + z + 1}{\sqrt{1 + 4 + 1}}$$

$$(1) \quad z + 1 = 0 \quad \text{ومنه اما :}$$

$$x + 2y = 0 \quad \text{أو :}$$

ولكن النقطة $(5, -1, 1)$ تقع في الجانب $P > 0$ والجانب $Q > 0$ ، وإذا أخذنا إحدى نقط المستوي (1) مثل $(0, 1, -1)$ فنجد أنها تقع في الجانب $P > 0$ والجانب $Q > 0$ ولذلك فإن المستوي المطلوب هو المستوي (1) .

١٥٥ - يبين أن المستويات المعينة بالمعادلة الآتية :

$$(2t^3 + t + 2)x + (t^3 - t + 1)y - (t^3 - t + 1)z + 2t^3 + t + 2 = 0$$

تمر بمستقيم ثابت حين يتغير الوسيط t .

الحل :

لنرتب هذه المعادلة وفق القوى المتناقصة للوسيط t فنحصل :

$$t^3(-2x + y - z + 2) + t(x - y + z + 1) + (2x + y - z + 2) = 0$$

ومنه يتبين لنا أن جميع النقط التي نعدم أمثال هذه المعادلة ، أي التي

تحقق جملة المعادلات :

$$(1) \quad 2x + y - z + 2 = 0$$

$$(2) \quad x - y + z + 1 = 0$$

$$(3) \quad 2x + y - z + 2 = 0$$

تحقق معادلة المستويات المفروضة مهما كان الوسيط t . أي أن جميع هذه المستويات تمر بالنقط التي تحقق المعادلات (1) و (2) و (3) بأن واحد . ولكننا نلاحظ أن (3) هي (1) نفسها ، ولذلك فإن هذه النقط تقع على المستقيم الفراغي المعين بتقاطع المستويين (1) و (2) وهو المطلوب .

١٥٦- اكتب معادلة المستوي المار بالمستقيم :

$$x + 2y - z + 4 = 0$$

$$2x - y + 4z - 1 = 0$$

وبالنقطة $A(1, 1, 1)$.

الحل :

ان جميع المستويات المارة بالمستقيم المفروض تعطى بالجزمة المشكلة من المستويين المعينين للمستقيم ، أي بالجزمة :

$$x + 2y - z + 4 + \lambda(2x - y + 4z - 1) = 0$$

ولتعيين مستوي الجزمة المار بالنقطة A ، نعوض احدائيات A في

معادلة الجزمة فنجد :

$$6 + 4\lambda = 0$$

وبحل هذه المعادلة نجد $\lambda = -\frac{3}{2}$. نعوض هذه القيمة في معادلة

الجزمة فنحصل على المعادلة المطلوبة التالية :

$$4x - 7y + 14z - 11 = 0$$

١٥٧ - (١) اكتب معادلات وجوه رباعي الوجوه ، الذي رؤوسه هي النقط :

$$S (0 , 0 , 3) ; A (4 , - 2 , 0) ; B (4 , 6 , 0) ; C (2 , 2 , 0)$$

(٢) اكتب معادلات المستويات المنصفة الداخلية للثنائيات
BC و AC و AB .

(٣) استنتج قيمة نصف قطر الكرة المرسومة داخل هذا
الرباعي والمماسه لوجوهه .

الحل :

(١) ان معادلة الوجه المار بالنقط S و A و B هي [حسب (٤)] .

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

وبنشر هذا المعين وفق عناصر السطر الثاني نجد :

$$- 3 \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

وبنشر هذين المعينين ثم بترتيب المعادلة الناتجة نحصل :

$$(1) \quad 3x + 4z - 12 = 0$$

وأما معادلة الوجه SAC فهي :

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

أو :

$$(2) \quad 2x + y + 2z - 6 = 0$$

بالطريقة نفسها نلاحظ أن معادلة الوجه SBC هي :

$$(3) \quad 6x - 3y + 2z - 6 = 0$$

وأن معادلة الوجه ABC هي :

$$(4) \quad z = 0$$

(٢) لتعين المنصف الداخلي للثمانية BC نلاحظ أن وجهي هذه

الثنائية هما ABC و SBC المعينين بالمعادلتين (3) و (4) . إن معادلتني
منصفي زاوية هذين المستويين هما :

$$\frac{6x - 3y + 2z - 6}{\sqrt{36 + 9 + 4}} = \pm \frac{z}{\sqrt{1}}$$

أي :

$$6x - 3y + 2z - 6 = \pm 7z$$

فاما أن يكون :

$$(5) \quad 6x - 3y - 5z - 6 = 0$$

أو أن يكون :

$$(6) \quad 6x - 3y + 9z - 6 = 0$$

إلا أننا نلاحظ أن النقطتين A و S تقعان في جهتين مختلفتين بالنسبة للمستوي (5) وفي جهة واحدة بالنسبة للمستوي (6) وهي الجهة :

$$6x - 3y + 9z - 6 > 0$$

بما يدل على أن المنصف المطلوب هو المعطى بالمعادلة (5) [لأنه لابد للمنصف الداخلي للثنائية BC أن يلاقي AS بين A و S] .
بطريقة مماثلة نلاحظ أن المنصف الداخلي للثنائية AC هو :

$$(7) \quad 2x + y - z - 6 = 0$$

وأن المنصف الداخلي للثنائية AB هو :

$$(8) \quad x + 3z - 4 = 0$$

(٣) إن مركز الكرة المطلوبة هو نقطة تقاطع المستويات (5) و (7) و (8) . بحل جملة المعادلات هذه نجد $(\frac{26}{11}, \frac{20}{11}, \frac{6}{11})$. أما نصف قطر الكرة المطلوب فهو بعد هذا المركز عن أحد الوجوه ، وليكن الوجه المعين بالمعادلة (4) : إذن يكون نصف القطر المطلوب (استناداً إلى دستور بعد نقطة عن مستو) :

$$r = \frac{6}{11}$$

١٥٨ - لدينا المستوي $P = x + 2y - z + 4 = 0$. احسب زواياه مع المستويات الاحداثية وبعده عن النقطة $(1, -3, 6)$ وزاويته مع المستوي $Q = 2x - y + 4z - 1 = 0$. اكتب معادلتَي المستويين المنصفين للثنائية (P, Q) .

الحل :

ان الأمثال الموجهة للناظم على المستوي P هي $(1, 2, -1)$ والأمثال الموجهة للناظم على المستوي xoy هي $(1, 0, 0)$ وبما أن الزاوية بين المستويين تساوي الزاوية بين الناطمين (أو تكملها) وإذا رمزنا بـ φ_1 لزاوية المستوي P مع المستوي xoy نجد :

$$\cos \varphi_1 = \frac{(1, 2, -1) \cdot (1, 0, 0)}{\sqrt{1+4+1} \cdot \sqrt{1+0+0}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

بطريقة مماثلة نجد ، إذا رمزنا بـ φ_1 و φ_2 لزاويتي P مع المستويين xoz و yoz على الترتيب .

$$\cos \varphi_2 = \frac{2}{\sqrt{6}} ; \cos \varphi_3 = \frac{-1}{\sqrt{6}}$$

وأما بعد النقطة $(6, -3, -1)$ عن المستوي P فهي استناداً إلى بعد نقطة عن مستو :

$$\frac{|6 + 2(-3) - (-1) + 4|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

وبما أن الأمثال الموجهة للناظم على المستوي Q هي $(2, -1, 4)$ فالزاوية θ بين المستويين P و Q تعطى بالعلاقة :

$$\cos \theta = \frac{(2, -1, 4) \cdot (1, 2, -1)}{\sqrt{4+1+16} \cdot \sqrt{1+4+1}} = \frac{-4}{\sqrt{126}} = \frac{-4}{3\sqrt{14}}$$

وأما معادلتا المستويين المنصفين للثنائية (P, Q) فهي :

$$\frac{x + 2y - z + 4}{\sqrt{6}} = \mp \frac{2x - y + 4z - 1}{\sqrt{21}}$$

١٥٩ - اكتب معادلي المستقيم المار بالنقطتين (1, 2, 1) و (2, 1, 3) .

الحل :

إن الأمثال الموجبة للمستقيم المطلوب هي :

$$2 - 1 = 1 , \quad 1 - 2 = -1 , \quad 3 - 1 = 2$$

ولذلك فإن معادتيه هما :

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z - 1}{2}$$

١٦٠ - لدينا المستقيمان المعينان بالمعادلات :

$$D \left\{ \begin{array}{l} z = k \\ y = 0 \end{array} \right. \quad D' \left\{ \begin{array}{l} z = -k \\ x = 0 \end{array} \right.$$

نأخذ على المستقيم D النقطة M التي فصلها a ، وعلى المستقيم D' النقطة M' التي ترتبها a' .

المطلوب إيجاد معادلي المستقيم MM' .

الحل :

بما أن النقطة M تقع على المستقيم D فإن إحداثياتها هي :

$$x = a \quad ; \quad y = 0 \quad ; \quad z = k$$

وبما أن النقطة M' تقع على المستقيم D' فإن إحداثياتها هي :

$$x = 0 \quad ; \quad y = a' \quad ; \quad z = -k$$

واستناداً إلى المستور الذي يعطي معادلي المستقيم المار بنقطتين مفروضتين تكون المعادلتان المطلوبتان هما :

$$\frac{x}{a} = \frac{y - a'}{-a'} = \frac{z + k}{2k}$$

١٦١- اكتب معادلي المستقيم المار من النقطة (2 , 1 , 1) والموازي للمستويين :

$$2x - y + 1 = 0$$

$$y - 1 = 0$$

الحل :

بما أن المستقيم المفروض يوازي المستويين فهو يوازي فصلهما المشترك .
وبما أن الفصل المشترك عمودي على كل من ناظمي المستويين ولذلك
فإننا نحصل على أمثاله الموجهة بضرب الناظم على المستوي الأول شعاعياً
بالناظم على المستوي الثاني . وبما أن الأمثال الموجهة للناظم على المستوي
الأول (2 , - 1 , 0) والأمثال الموجهة للناظم على المستوي الثاني
(0 , 1 , 0) فالأمثال الموجهة للفصل المشترك (0 , 0 , 2) وعلى هذا
فمعادلتا المستقيم هما :

$$\frac{x - 2}{0} = \frac{y - 1}{0} = \frac{z - 1}{2}$$

أو :

$$x = 2$$

$$y = 1$$

١٦٢- اكتب معادلتى المستقيم المار بالنقطة $(1, 2, -1)$ والعمودي على المستوي $3x - 5y + 4z = 5$ ثم احسب طول العمود النازل من النقطة المفروضة على المستوي واحداثيات موقع العمود .

الحل :

ان المستقيم المطلوب يمر بالنقطة $(1, 2, -1)$ وبوازي الشعاع $(3, -5, 4)$ ولذلك فمعادلتهما هما :

$$(1) \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+1}{4}$$

وطول العمود هو بعد النقطة المفروضة عن المستوي فيساوي اذن :

$$\frac{|3 \cdot 1 - 5 \cdot 2 + 4(-1) - 5|}{\sqrt{9 + 25 + 16}} = \frac{8\sqrt{2}}{5}$$

وأما موقع العمود فهو نقطة تقاطع المستوي المفروض مع المستقيم (1) ، فإذا دعونا النسبة المشتركة في (1) بـ q فعندئذ تكون معادلات المستقيم الوسيطة هي :

$$(2) \quad \begin{aligned} x &= 1 + 3q \\ y &= 2 - 5q \\ z &= -1 + 4q \end{aligned}$$

وبالتعويض في معادلة المستوي نجد :

$$q = \frac{8}{25}$$

فالنقطة المطلوبة تتعين إذن من (2) بتعويض θ بقيمتها :

$$\left(\frac{49}{25} , \frac{2}{5} , \frac{7}{25} \right)$$

١٦٣ - احسب زاوية المستقيمين :

$$\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

الحل :

بسهولة نلاحظ ان الأمثال الموجهة لناظم المستوي الأول المستقيم الأول (1 , 2 , 1) والأمثال الموجهة لناظم المستوي الثاني (1 , - 2 , 1) لذلك فإن الأمثال الموجهة للمستقيم الأول « الفصل المشترك للمستويين » هي (4 , 0 , - 4) وبالطريقة نفسها نجد الأمثال الموجهة للمستقيم الثاني هي (0 , - 3 , - 3) وزاوية المستقيمين تعطى بالعلاقة :

$$\cos \theta = \frac{4(-3) + 0(-3) - 4(0)}{\sqrt{16+16} \times \sqrt{9+9}} = -\frac{1}{2}$$

ومنه :

$$\theta = \frac{2\pi}{3}$$

١٦٤ - عين الزاوية بين المستقيم :

$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

والمستوي :

$$x - y + z + 1 = 0$$

الحل :

ان الأمثال الموجهة للمستقيم هي (2 , 4 , - 2) أو (1 , 2 , - 1)
والأمثال الموجهة للناظم على المستوي هي (1 , - 1 , 1) ولكن الزاوية
بين الناظم على المستوي والمستقيم تتمم زاوية المستقيم مع المستوي إذن :

$$\sin \theta = \frac{-2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

١٦٥ - أوجد معادلات مرتسمات المستقيم :

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ 2x + 4y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

على المستويات الاحداثية :

الحل :

بجذف z من المعادلتين المفروضتين نحصل على معادلة مرتسم المستقيم
المفروض على المستوي oxy :

$$3x + 5y - 4 = 0$$

وبجذف y نحصل على معادلة المرتسم على المستوي oxz :

$$2x + 5z - 1 = 0$$

وبجذف x نحصل على معادلة المرتسم على المستوي oyz :

$$2y - 3z - 1 = 0$$

١٦٦ - أوجد معادلي المستقيم المار بالنقطة $M(1, 1, 2)$ والذي يلاقي المستقيم D المعين بالمعادلتين :

$$\begin{cases} x - 2y + 2z + 1 = 0 \\ 3x - y + 5z - 2 = 0 \end{cases}$$

ويتعامد معه . أوجد احداثيات تقاطع هذا العمود مع المستقيم المذكور .

الحل :

لنمثل المستقيم المفروض وسيطياً فنضع $z = 0$ في المعادلتين المفروضتين ثم نحلها بالنسبة لـ x و y فنجد :

$$x = 1 - \frac{8}{5}t ; \quad y = 1 + \frac{0}{5}t ; \quad z = 0$$

ولو استبدلنا بالوسيط 0 وسيطاً آخر $t = \frac{0}{5}$ (لتبسيط الحسابات) حصلنا على التمثيل الوسيطى .

$$(1) \quad x = 1 - 8t ; \quad y = 1 + t ; \quad z = 5t$$

وتكون الأمثال الموجهة للمستقيم الذي يصل M بنقطة من D (موافقة لقيمة الوسيط t) هي :

$$8t ; \quad -t ; \quad 2 - 5t$$

وشرط تعامد هذا المستقيم مع المستقيم D (الذي أمثاله الموجهة هي $(-8, 1, 5)$) :

$$8(8t) + 1(-t) + 5(2 - 5t) = 0$$

$$t = \frac{1}{9} \text{ ومنه نجد}$$

بالتعويض في (1) نحصل على النقطة من المستقيم D الواقعة على المستقيم المطلوب (نقطة تقاطع المستقيم D مع المستقيم المطلوب) .

$$x = \frac{1}{9} ; \quad y = \frac{10}{9} ; \quad z = \frac{5}{9}$$

ومعادلتا المستقيم المار بهذه النقطة والنقطة M هما :

$$\frac{x - 1}{-\frac{8}{9}} = \frac{y - 1}{\frac{1}{9}} = \frac{z - 2}{-\frac{13}{9}}$$

أو :

$$\frac{9}{8} ((1-x)) = 9 (y - 1) = \frac{9}{13} (2 - z)$$

طريقة أخرى : نكتب معادلة المستوي المار بـ M والعمودي على D : إن الامثال الموجهة للمستقيم D نحصل عليها بالضرب الشعاعي للناظمين على المستويين المفروضين فنجد (5 , 1 , - 8) فمعادلة المستوي المار بـ M والعمودي على D هي :

$$- 8 (x - 1) + (y - 1) + 5 (z - 2) = 0$$

أو :

$$(2) \quad - 8x + y + 5z - 3 = 0$$

بحل هذه المعادلة مع معادلتا المستقيم D نحصل على نقطة تلاقي المستقيم المطلوب مع المستقيم D .

$$\left(\frac{1}{9}, \frac{10}{9}, \frac{5}{9} \right)$$

ثم نكتب معادلتى المستقيم المار بـ M وهذه النقطة كما فعلنا في الطريقة الأولى .

ملاحظة : إن المستقيم المطلوب يقع في المستوي (2) . فلو استطعنا الحصول على مستو آخر يقع فيه المستقيم المطلوب لثم المطلوب (بطريقة ثالثة) . للحصول على هذا المستوي الثاني نكتب معادلة الحزمة المكونة من مستويي D :

$$x - 2y + 2z + 1 + \lambda (3x - y + 5z - 2) = 0$$

ولنعين λ بحيث يمر مستوي الحزمة من النقطة M فنجد :

$$4 + 10\lambda = 0$$

ومنه نجد $\lambda = -\frac{2}{5}$. بالتعويض في معادلة الحزمة نجد :

$$(3) \quad x + 8y - 9 = 0$$

والمستقيم المطلوب يتعين بـ (2) و (3) .

١٦٧ - أوجد معادلات المستقيمتين التي تقطع المستقيمين :

$$D \begin{cases} z = 0 \\ x = a \end{cases} \quad B' \begin{cases} x = 0 \\ y = a \end{cases}$$

وتصنع مع هذين المستقيمين زاويتين متساويتين :

الحل :

إن المعادلات الوسيطة للمستقيم D هي :

$$x = a ; \quad y = q ; \quad z = 0$$

والمعادلات الوسيطة للمستقيم D' هي :

$$x = 0 ; \quad y = a ; \quad z = \lambda$$

والمعادلتان الديكارتيتان للمستقيم Δ الذي يصل نقطة ما من المستقيم الأول (موافقة لقيمة ما ل q) بنقطة ثانية من المستقيم الثاني (موافقة لقيمة ما ل λ) هما :

$$(1) \quad \frac{x}{a} = \frac{y - a}{q - a} = \frac{z - \lambda}{-\lambda}$$

إن الأمثال الموجهة لهذا المستقيم هي :

$$a ; \quad q - a ; \quad -\lambda$$

والأمثال الموجهة لـ D هي $(0, 1, 0)$ والأمثال الموجهة لـ D'

هي $(0, 0, 1)$. فلكي يصنع Δ زاويتين متساويتين مع D و D'

يلزم أن يكون (نكتب أن جيب تمام الزاوية التي يصنعها Δ مع D

تساوي جيب تمام الزاوية التي يصنعها Δ مع D') :

$$\frac{q - a}{\sqrt{a^2 + (q - a)^2 + \lambda^2}} = \mp \frac{-\lambda}{\sqrt{a^2 + (q - a)^2 + \lambda^2}}$$

ومنه :

$$q - a = \pm \lambda$$

والمعادلات المطلوبة هي (بالتعويض في (1)) :

$$\frac{x}{a} = \frac{y - a}{\mp \lambda} = \frac{z - \lambda}{-\lambda}$$

١٦٨ - عين مستقيماً يمر بمبدأ الاحداثيات ويستند إلى المستقيمين :

$$D \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \quad D' \begin{cases} y=3 \\ z=4 \end{cases}$$

الحل :

ان المعادلات الوسيطة للمستقيم D هي :

$$x=1 ; y=2 ; z=0$$

والمعادلات الوسيطة للمستقيم D' هي :

$$x=\lambda ; y=3 ; z=4$$

ومعادلة المستقيم الذي يصل نقطة من المستقيم الأول (موافقة لقيمة

مال 0) بنقطة من المستقيم الثاني (موافقة لقيمة مال λ) هما :

$$(1) \quad \frac{x-1}{\lambda-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-0}{4-0}$$

ولكي يمر هذا المستقيم بمبدأ الاحداثيات يلزم أن يكون :

$$\frac{-1}{\lambda-1} = -2 = \frac{-0}{4-0}$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد $0 = \frac{8}{3}$ و $\lambda = \frac{3}{2}$. بالتعويض في (1)

نجد المستقيم المطلوب :

$$\frac{x-1}{1/2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-8/3}{4/3}$$

١٦٩ - أوجد معادلة المستوي المار بالمستقيم :

$$(1) \quad x+y+z=0 , \quad 2x-y+3z=0$$

$$(2) \quad x = 2y = 3z : \text{والموازي للمستقيم}$$

الحل :

(١) ان المستوي المطلوب هو أحد مستويات الخزمة :

$$(3) \quad (1 + 2\lambda)x + (1 - \lambda)y + (1 + 3\lambda)z = 0$$

المشكلة من المستويين (١) والموازي للمستقيم (٢) الذي يمكن كتابته

على الشكل :

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$$

ولذلك فإن الأمثال الموجهة هي (٢, ٣, ٦) ، والمستوي المطلوب هو

أحد المستويات (٣) من أجل قيمة لـ λ تتعين بكتابة شرط توازي

هذا المستوي مع المستقيم المفروض « تعامد الناظم على المستوي مع

المستقيم المفروض » إذن :

$$6(1 + 2\lambda) + 3(1 - \lambda) + 2(1 + 3\lambda) = 0$$

ومنه :

$$\lambda = -\frac{11}{15}$$

بالتعويض في (٣) نجد معادلة المستوي المطلوب :

$$7x - 26y - 18z = 0$$

١٧٠ - لدينا جملة المعادلات الخطية :

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

فإذا رمزنا بـ \vec{A} و \vec{B} و \vec{C} و \vec{D} للأشعة :

$$\vec{A} (a_1 , a_2 , a_3) , \vec{B} (b_1 , b_2 , b_3) , \vec{C} (c_1 , c_2 , c_3)$$

$$\vec{D} (d_1 , d_2 , d_3)$$

$$\Delta = (\vec{A} , \vec{B} , \vec{C}) \neq 0 \quad \text{وإذا كان :}$$

فان حل مجموعة المعادلات المفروضة هو :

$$x = \frac{ (\vec{D} , \vec{B} , \vec{C}) }{\Delta} , y = \frac{ (\vec{A} , \vec{D} , \vec{C}) }{\Delta} , z = \frac{ (\vec{A} , \vec{B} , \vec{D}) }{\Delta}$$

الحل :

يمكن تمثيل جملة المعادلات المفروضة بالمعادلة الشعاعية :

$$(1) \quad x \vec{A} + y \vec{B} + z \vec{C} = \vec{D}$$

فلو ضربنا طرفي هذه المعادلة داخلياً بالشعاع $(\vec{B} \wedge \vec{C})$ لوجدنا :

$$x (\vec{A} , \vec{B} , \vec{C}) + y (\vec{B} , \vec{B} , \vec{C}) + z (\vec{C} , \vec{B} , \vec{C}) = (\vec{D} , \vec{B} , \vec{C})$$

ومنه :

$$x = \frac{ (\vec{D} , \vec{B} , \vec{C}) }{\Delta}$$

ولو ضربنا طرفي المعادلة (1) بـ $(\vec{C} \wedge \vec{A})$ نارة وبـ $(\vec{B} \wedge \vec{A})$

نارة أخرى حصلنا على قيم y و z المطلوبة .

١٧١- برهن ان المستقيم :

$$(1) \quad 2x - y + 3z + 3 = 0$$

$$(2) \quad x + 10y - 21 = 0$$

يقطع المستقيم :

$$(3) \quad 2x - y = 0$$

$$(4) \quad 7x + z - 6 = 0$$

احسب احداثيات نقطة التقاطع واكتب معادلة المستوي الحاوي لكل من المستقيمين .

الحل :

كي يتقاطع المستقيمان يجب أن تتلاقى المستويات الأربعة (1) و (2) و (3) و (4) في نقطة واحدة . فإذا حسبنا حلول ثلاث معادلات منها ولتكن (1) و (2) و (3) نجد :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 21 & 10 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 1 & 10 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-63}{-63} = 1$$

وبالطريقة نفسها نجد : $z = -1 \quad y = 2$

ولما كانت نقطة التقاطع $(1, 2, -1)$ تحقق المستوي (4) ولذلك فان المستقيمين يتقاطعان بالنقطة $(1, 2, -1)$.

والمستوي المطلوب يمر بنقطة التقاطع ويوازي كلا من المستقيمين المفروضين أي أنه يوازي الشعاعين $(-10, 1, 7)$ و $(-1, -2, 7)$

ولذلك فمعادلته :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ -10 & 1 & 7 \\ -1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

وبنشر هذا المعين نجد : $x + 3y + z = 6$

١٧٢- عين مسقط النقطة (2 , 3 , 1) على المستقيم :

$$(1) \quad x = t - 7 \quad , \quad y = 2t - 2 \quad , \quad z = 3t - 2$$

الحل :

ان مسقط النقطة على المستقيم المفروض هي نقطة تقاطع المستوي المار بالنقطة المفروضة والعمودي على المستقيم المفروض بالمستقيم المفروض نفسه . ولما كانت الأمثال الموجهة للمستقيم هي (1 , 2 , 3) فإن معادلة المستوي المذكور هي :

$$(x - 2) + 2(y - 3) + 3(z - 1) = 0$$

أي :

$$(2) \quad x + 2y + 3z - 11 = 0$$

فتقاطع هذا المستوي مع المستقيم المفروض ينتج بتعويض (1)

بـ (2) فنجد $t = 2$.

والنقطة المطلوبة تنتج عن تبديل $t = 2$ بـ (1) فنجد : (-5 , 2 , 4)

١٧٣- أوجد الشكل العادي للمستقيم :

$$4x + 4y - 5z = 12 \quad 8x + 12y - 13z = 32$$

واكتب معادلة المساقط على المستويات الاحداثية الثلاث :

الحل :

ان الأمثال الموجهة للمستقيم هي (2 , 3 , 4) بقي ان نعرف احدى نقط
المستقيم ولتكن تلك التي يقطع فيها المستوي xoy فإذا عوضنا كل z
بصفر في معادلات المستقيم وجدنا $x = 1$ ، $y = 2$ ومنه تكون
معادلات المستقيم المطلوبة :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{4}$$

وأما معادلة المسقط على المستوي xoy فهي العلاقة بين x و y
لنقطة التي ترسم المستقيم المفروض . فمن النسبة الاولى والثانية من المعادلات
الأخيرة نجد :

$$3x - 2y + 1 = 0$$

بطريقة مماثلة نجد معادلات المساقط على المستوي xoz و xoy هي :

$$4y - 3z = 8 \quad 2x - z = 2$$

١٧٤- احسب بعد النقطة $M_1(6, 6, -1)$ عن المستقيم :

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-1}$$

الحل :

المستقيم المفروض ير بالنقطة $M_0(2, 1, -3)$ ويوازي الشعاع

$$\vec{V}(1, 2, -1)$$

وبسهولة نجد : $|\vec{V}| = \sqrt{6}$ و $|\vec{M}_0 \vec{M}_1 \wedge \vec{V}| = \sqrt{126}$ ومنه البعد

المطلوب يساوي :

$$\sqrt{126} : \sqrt{6} = \sqrt{21}$$

١٧٥- احسب بعد النقطة $(1, 2, 3)$ عن المستقيم المعين بالمعادلتين :

$$(1) \quad 4x + 2y - 3z - 8 = 0 \quad x + 2y - 7z - 6 = 0$$

الحل :

ان المستويين المقروطين ليسا متعامدين ولذلك نشكل حزمة المستويات :

$$(4 + \lambda)x + (2 + 2\lambda)y - (3 + 7\lambda)z - (8 + 6\lambda) = 0$$

ولنعين أحد مستويات الحزمة المتعامد مع المستوي الأول . إن هذا المستوي يوافق قيمة λ تعطى بالعلاقة :

$$4(4 + \lambda) + 2(2 + 2\lambda) + 3(3 + 7\lambda) = 0$$

$$\lambda = -1 \quad \text{ومنه :}$$

$$(2) \quad 3x + 4z - 2 = 0 \quad \text{والمستوي المطلوب هو :}$$

ويكون بعد النقطة $(1, 2, 3)$ عن المستوي الأول من (1) :

$$d_1 = \frac{9}{\sqrt{29}}$$

وعن المستوي (2) هو :

$$d_2 = \frac{13}{5}$$

$$d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} = \frac{\sqrt{6926}}{5\sqrt{29}} \quad \text{ويكون :}$$

١٧٦- أوجد طول ومعادلة العمود المشترك للمستقيمين :

$$(1) \quad \frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

$$(2) \quad \frac{x+6}{2} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{-1}$$

الحل :

إذا دعونا النسبة المشتركة في (1) بـ q وفي (2) بـ λ حصلنا على المعادلات الوسيطة للمستقيمين .

$$(3) \quad x = 3 + q \quad , \quad y = 4 + q \quad , \quad z = -1 - q$$

$$(4) \quad x = -6 + 2\lambda \quad , \quad y = -5 + 4\lambda \quad , \quad z = 1 - \lambda$$

إن أمثال توجيه المستقيمتين الواصلة بين نقطة ما من المستقيم الأول ونقطة ما من المستقيم الثاني هي :

$$9 + q - 2\lambda \quad , \quad 9 + q - 4\lambda \quad , \quad -2 - q + \lambda$$

والعمود المشترك عمودي على كل من المستقيمين المفروضين ، إذن يجب أن يكون :

$$(9 + q - 2\lambda) + (9 + q - 4\lambda) - (-2 - q + \lambda) = 0$$

$$2(9 + q - 2\lambda) + 4(9 + q - 4\lambda) - (-2 - q + \lambda) = 0$$

$$\lambda = 2 \quad , \quad q = -2 \quad \text{وبحل هاتين المعادلتين نجد}$$

ويكون بالتالي العمود المشترك هو المستقيم الواصل بين النقطتين اللتين نحصل عليهما بتبديل قيم q و λ التي حصلنا عليها في (3) و (4) :

$$(1, 2, 1) \quad , \quad (-2, 3, -1)$$

وطول العمود المشترك هو البعد بين هاتين النقطتين $\sqrt{14}$ ومعادلته هي :

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

١٧٧- اكتب معادلتى العمود المشترك للمستقيمين :

$$D \begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases} \quad D' \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ -2x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

ثم احسب طول هذا العمود :

الحل :

ان الأمثال الموجبة للمستقيم D هي $(-1, 1, 1)$ والأمثال الموجبة للمستقيم D' هي $(-2, 1, 1)$ فتكون الأمثال الموجبة للعمود المشترك $(2, -1, 3)$. لنكتب معادلة المستوي المار بـ D والموازي للعمود المشترك فنشكل من أجل ذلك معادلة الحزمة من مستويي D :

$$(2 + \lambda)x - y + (3 + \lambda)z - 1 - 2\lambda = 0$$

ونختار مستوي الحزمة الموازي للعمود المشترك (نكتب شرط تعامد

الناظم على مستوي الحزمة مع العمود المشترك) :

$$2(2 + \lambda) + 1 + 3(3 + \lambda) = 0$$

ومنه $\lambda = -\frac{14}{5}$. بالتعويض في معادلة الحزمة نجد المستوي :

$$(1) \quad 4x + 5y - z - 23 = 0$$

نكتب بعد ذلك معادلة المستوي المار بـ D' والموازي للعمود المشترك

نجد ، بطريقة مماثلة لما سبق ، المستوي :

$$(2) \quad x - 4y - 2z + 5 = 0$$

إن المعادلتين (١) و (٢) يعينان العمود المشترك .

لحساب طول العمود نحل معادلات المستقيم D مع (٢) فنجد

النقطة $M_1 (\frac{19}{7}, \frac{16}{7}, -\frac{5}{7})$ ثم نحل معادلات المستقيم D' مع (١)

فنجد النقطة $M_2 (-\frac{2}{8}, \frac{5}{8}, \frac{11}{8})$ والبعد بين هاتين النقطتين :

$$\sqrt{(\frac{19}{7} - \frac{2}{8})^2 + (\frac{16}{7} - \frac{5}{8})^2 + (-\frac{5}{7} - \frac{11}{8})^2} \neq 3.6$$

هو طول العمود المطلوب .

١٧٨ - عين على المستقيم :

$$(1) \quad \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

النقطة التي تبعد نفس البعد عن المستويين المتوازيين :

$$(2) \quad z + 2y + z - 2 = 0 \quad ; \quad x + 2y + z - 1 = 0$$

الحل :

إن المحل الهندسي للنقط المتساوية البعد عن المستويين (٢) هو

المستوي :

$$\frac{x + 2y + z + 1}{\sqrt{6}} = - \frac{(x + 2y + z - 3)}{\sqrt{6}}$$

$$x + 2y + z = 1 \quad \text{أي :}$$

وبحل هذه المعادلة مع المعادلات (١) نجد (٣ , - ١ , ٠) .

١٧٩ - أوجد نظير النقطة $M (2 , - 1 , 3)$ بالنسبة للمستوي :

$$3x - y + 2z - 1 = 0$$

الحل :

لنفرض النقطة $M' (x', y', z')$ نظير M بالنسبة للمستوي المفروض
ان المستقيم المار بـ M و M' والذي امثاله الموجهة :

$$2 - x' ; -1 - y' ; 3 - z'$$

عمودي على المستوي ، فهو يوازي الناظم على المستوي $(3, -1, 2)$.
فمن شرط التوازي نكتب :

$$(1) \quad \frac{2 - x'}{3} = \frac{-1 - y'}{-1} = \frac{3 - z'}{2}$$

كما أن نقطة منتصف القطعة MM' ، التي احداثياتها :

$$\frac{x' + 2}{2} ; \frac{y' - 1}{2} ; \frac{z' + 3}{2}$$

تقع على المستوي المفروض ، ولذلك فإن احداثياتها تحقق معادلته :

$$3 \frac{x' + 2}{2} - \frac{y' - 1}{2} + 2 \frac{z' + 3}{2} - 1 = 0$$

أو :

$$(2) \quad 3x' - y' + 2z' + 11 = 0$$

بحل المعادلات (1) و (2) نجد :

$$x' = -\frac{22}{7} ; y' = \frac{5}{7} ; z' = -\frac{3}{7}$$

وهو المطلوب :

١٨٠ - أوجد نظير المستوي :

$$Q \equiv x - 2y + z - 4 = 0$$

بالنسبة للمستوي :

$$P \equiv 2x + y - z + 1 = 0$$

الحل :

ان المستوي النظير هو احد مستويات الحزمة المشكلة من المستويين P و Q المتقاطعين :

$$(1) \quad (x - 2y + z - 4) + \lambda (2x + y - z + 1) = 0$$

لتعين قيمة λ الموافقة للمستوي المطلوب نبحث عن احدى نقاطه .
ولذلك يكفي ان نختار نقطة من المستوي Q ونعين نظيرها بالنسبة للمستوي P . إن النقطة $(0, 0, 4)$ تقع على المستوي Q ، ويتعين نظير هذه النقطة كما في المسألة السابقة فنجد $(2, 1, 3)$. لنعوض احدائيات هذه النقطة في المعادلة (1) فنحصل :

$$-1 + \lambda(3) = 0$$

ومنه $\lambda = \frac{1}{3}$. بتعويض هذه القيمة في (1) نحصل على معادلة المستوي المطلوب :

$$5x - 5y + 2z - 11 = 0$$

١٨١ - أوجد نظير المستقيم :

$$(1) \quad \begin{cases} 2x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$$

بالنسبة للمستوي :

$$(2) \quad x + 2y + 3z - 1 = 0$$

الحل :

بجمل المعادلات (1) و (2) نحصل على النقطة $M_1 (- 1 , 1 , 0)$ ،
حيث يقطع المستقيم (1) المستوي (2) . إن هذه النقطة من المستقيم
النظير . يكفي أن نعرف نقطة ثانية منه لنتمكن من كتابة معادلاته .
نختار النقطة من المستقيم (1) ولتكن $(0 , 3 , 6)$ ولنبحث عن نظيرها
بالنسبة للمستوي (2) كما فعلنا في المسألة (١٧٩) فنجد أن هذا النظير هو
 $M_2 (\frac{-23}{7} , \frac{-25}{7} , \frac{-27}{7})$. وبذلك تؤول المسألة إلى إيجاد معادلات
مستقيم مار بالنقطتين M_1 و M_2 :

$$\frac{x+1}{16} = \frac{y-1}{32} = \frac{z}{27}$$

١٨٢ - نعتبر المستويين :

$$p \equiv x (1 - u^2) + y (1 + u^2) + 2 uz = a + bu + cu^2$$

$$Q \equiv 2 u^2 x + y - 2 uz = a' + b'u + c'u^2$$

حيث : a و b و c و a' و b' و c' اعداد ثابتة و u وسيط متحول :

١ - برهن ان كلا من P و Q يمر بنقطة ثابتة .

٢ - احسب زاويتيها v وبرهن أن :

$$2 u^2 = \operatorname{tg} \left(\frac{v}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{v}{2} - \frac{\pi}{8} \right)$$

٣ - برهن انه يوجد عدد غير منته من النقط الثابتة الواقعة على

بعد ثابت من P . برهن نفس الخاصة من أجل Q .

٤ - برهن أن P يصنع زاوية ثابتة مع مستقيم ثابت . احسب

هذه الزاوية . برهن نفس الخاصة من أجل Q .

الحل :

إذا رتبنا معادلة المستوي الأول بالنسبة لقوى u المتزايدة وجدنا .

$$(y - x - c) u^2 + (2z - b) u + x + y - a = 0$$

نلاحظ أن هذه المعادلة محققة مهما كانت u إذا كان :

$$y - x - c = 0 , \quad 2z = b , \quad x + y - a = 0$$

أي :

$$x = \frac{a - c}{2} , \quad y = \frac{a + c}{2} , \quad z = \frac{b}{2}$$

وهذا يعني أن جميع المستويات P تمر بالنقطة :

$$\left(\frac{a - c}{2} , \frac{a + c}{2} , \frac{b}{2} \right)$$

بنفس الطريقة نجد أن المستويات Q تمر بالنقطة :

$$\left(\frac{c'}{2} , a' , -\frac{b'}{2} \right)$$

٢ - بما أن الأمثال الموجبة للناظم على المستوي الأول هي :

$$1 - u^2 , \quad 1 + u^2 , \quad 2u$$

والأمثال الموجبة للناظم على المستوي الثاني هي :

$$2u^2 , \quad 1 , \quad -2u$$

فإن :

$$\cos v = \frac{2u^2(1 - u^2) + (1 + u^2) - 4u^2}{\sqrt{2(1 + u^2)} \cdot (1 + 2u^2)}$$

أو :

$$\cos v = \frac{1 - 2u^2}{\sqrt{2}(1 + 2u^2)}$$

ومنه :

$$2u^2 = \frac{1 - \sqrt{2} \cos v}{1 + \sqrt{2} \cos v} = \frac{\cos \frac{\pi}{4} - \cos v}{\cos \frac{\pi}{4} + \cos v}$$

أي :

$$2u^2 = \operatorname{tg} \left(\frac{v}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{v}{2} - \frac{\pi}{8} \right)$$

٣ - إذا كانت X و Y و Z نقطة ما فإن بعدها عن المستويات P

(بغض النظر عن الإشارة) هو :

$$d = \frac{(1 - u^2)X + (1 + u^2)Y + 2uZ - a - bu - cu^2}{\sqrt{2}(1 + u^2)}$$

فإذا رتبنا حسب قوى u وجدنا :

$$(c + \sqrt{2}d + X - Y)u^2 - (2Z - b)u + \sqrt{2}d - X - Y + a = 0$$

وهذه المعادلة تكون محقة مها كانت u إذا كان :

$$X - Y + c + \sqrt{2}d = 0$$

$$2Z - b = 0$$

$$\sqrt{2}d - X - Y + a = 0$$

وبحل هذه المعادلات نجد :

$$X = \frac{a - c}{2} , Y = \sqrt{2}d + \frac{c + a}{2} , Z = \frac{b}{2}$$

وهذا يعني أنه من أجل كل قيمة لـ d توجد نقطة ثابتة تبعد عن كل المستويات نفس البعد والمحـل الهندسي لهذه النقط الثابتة هو المستقيم الموازي لمحور العينات :

$$X = \frac{a-c}{2} ; \quad Z = \frac{b}{2}$$

بنفس الطريقة نجد المحـل الهندسي للنقط الثابتة التي تبعد عن المستويات Q بعداً ثابتاً هو المستقيم :

$$Y - X = a' - \frac{c'}{2} ; \quad Z = \frac{b'}{2}$$

٤ - كي تصنع المستويات P زاوية ثابتة مع مستقيم ثابت يكفي أن يصنع ناظماً زاوية ثابتة مع مستقيم ثابت . بسهولة نلاحظ أن جيوب تمام توجيه الناظم هي :

$$\frac{(1 - u^2)}{\sqrt{2} (1 + u^2)} , \quad \frac{1}{\sqrt{2}} , \quad \frac{\sqrt{2} u}{1 + u^2}$$

ومنها نلاحظ أن الناظم على المستويات P « مهما كانت u » يصنع زاوية ثابتة مع محور العينات مقدارها $\frac{\pi}{4}$.

بنفس الطريقة نرى أن الناظم على المستويات Q يصنع زاوية ثابتة مع المنحى $\gamma = 0$ و $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، مقدارها $\frac{\pi}{4}$.

مسائل وممارس غير محلولة

١٨٣- اكتب معادلة المستوي المار بالمبدأ والموازي لكل من المستقيمين .

$$x - y + 4z = 1 \quad , \quad 2x + y - 3z = 2$$

$$x + 3 = 2y + 1 = 3z + 2$$

١٨٤- اكتب معادلة المستوي المار بالمستقيم :

$$3x - 4y + 5z = 10 \quad , \quad 2x + 2y - 3z = 4$$

والموازي للمستقيم :

$$x = 2y = 3z$$

١٨٥- أوجد نقطتين من المستقيم :

$$x = 2y = 3z + 6$$

يبعدان 7 عن المستوي :

$$2x + y - 2z = 5$$

١٨٦- برهن أن المستويات الأربعة :

$$x + y + 2z = 4 \quad , \quad x + 2y - z = 2$$

$$2x - y - z = 0 \quad , \quad x + y + z = 3$$

تتلاقى في نقطة واحدة .

١٨٧- احسب حجم رباعي الوجوه المحصور بالمستويات .

$$x + y + z = 1 \quad , \quad x - y = 1$$

$$x - z = 1 \quad , \quad z = 2$$

١٨٨- اكتب معادلة المستقيم المار من النقطتين $(1, 2, 1)$ ، $(1, 2, 3)$.

١٨٩- عين الزاوية بين المستقيمين :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

١٩٠ - احسب جيب تمام الزاوية بين المستقيمين:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{2}$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{1}$$

١٩١ - عين مسقط المستقيم:

$$x + y + z = 1 \quad , \quad x - y - 2z = 0$$

على المستوي : $x + 2y + 3z - 6 = 0$

١٩٢ - اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة $M(1, 2, 3)$ والذي يقطع محاور السينات بشكل عمودي ثم اكتب معادلة المستقيم المار بنفس النقطة والقاطع لمحور العيّنات بشكل عمودي ثم أوجد معادلة المستوي المار بالمستقيمين المفروضين .

١٩٣ - أوجد معادلة المستوي المار بالمستقيم $x = 2y = 3z$ والعمودي على

$$\text{المستوي } 5x + 4y - 3z = 8$$

١٩٤ - احسب بعد النقطة $(2, 4, 5)$ عن المستقيم :

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

واوجد احداثيات مسقط النقطة المفروضة على المستقيم المفروض .

١٩٥ - احسب طول ومعادلة العمود المشترك للمستقيمين :

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-1}$$

$$\frac{x+7}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$$

١٩٦ - احسب طول العمود المشترك للمستقيمين :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + 2y + 2z = -4 \end{cases}$$

١٩٧ - اوجد الشرط الذي يجب أن يتحقق حتى تمر المستويات

الثلاث :

$$x = cy + bz$$

$$y = az + cx$$

$$z = bx + ay$$

بستقيم واحد .

١٩٨ - لدينا مجموعة المستويات :

$$\frac{x}{\lambda - a} + \frac{y}{\lambda - b} + \frac{z}{\lambda - c} = 1$$

حيث λ وسيط و a و b و c اعداد ثابتة برهن :

١ - توجد ثلاثة مستويات تمر بنقطة ما M من الفراغ . احسب

احداثيات M بدلالة λ_1 و λ_2 و λ_3 قيم λ المقابلة للمستويات الثلاثة .

٢ - عين وضع M كي ينطبق مستويان من المستويات الثلاثة

السابقة .

٣ - عين وضع M كي تنطبق المستويات الثلاثة :

الاجوبة

$$13x + 20y - 69z = 0 \quad - ١٨٣$$

$$x - 20y + 27z = 14 \quad - 188$$

$$(12, 6, 2), \left(-\frac{120}{11}, -\frac{60}{11}, -\frac{62}{11} \right) \quad - 189$$

$$6 \quad - 189$$

$$x - 1 = 0, y - 2 = 0 \quad - 188$$

$$\frac{\pi}{2} \quad - 189$$

$$\cos \Theta = \frac{4}{9} \quad - 190$$

$$\begin{cases} 13x + y - 5z = 7 \\ x + 2y + 3z = 6 \end{cases} \quad - 191$$

$$\begin{cases} 3x = z \\ 3y = 2z \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x + 3y - 2z = 6 \end{cases} \quad - 192$$

$$17x - 28y - 9z = 0 \quad - 193$$

$$\sqrt[3]{24}, (1, 6, 0) \quad - 194$$

$$\sqrt[3]{35}, \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z-3}{1} \quad - 195$$

$$d = 1 \quad - 196$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1 \quad - 197$$

$$x = -\frac{(a - \lambda_1)(a - \lambda_2)(a - \lambda_3)}{(a - b)(a - c)} - 1 \quad - 198$$

$$y = -\frac{(b - \lambda_1)(b - \lambda_2)(b - \lambda_3)}{(b - c)(b - a)}$$

$$y = -\frac{(c - \lambda_1)(c - \lambda_2)(c - \lambda_3)}{(c - a)(c - b)}$$

$$x = - \frac{(a - u)^2 (a - v)}{(a - b)(a - c)} \quad - 2$$

$$y = - \frac{(b - u)^2 (b - v)}{(b - c)(b - a)}$$

$$z = - \frac{(c - u)^2 (c - v)}{(c - a)(c - b)}$$

$$x = \frac{(t - a)^3}{(a - b)}, \quad y = \frac{(t - b)^3}{(b - c)(b - a)}, \quad - 3$$

$$z = \frac{(t - c)^3}{(c - a)(c - b)}$$

الفصل الخامس

الدائرة في المستوى

١ - الدائرة هي الحل الهندسي للنقط المتساوية البعد عن نقطة ثابتة . ندعو النقطة الثابتة مركز الدائرة والبعد الثابت نصف قطرها .

٢ - المعادلة الديكارتية للدائرة التي يقع مركزها في النقطة $c(a, b)$ والتي نصف قطرها R هي :

$$(1) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

وفي الحالة الخاصة عندما يقع المركز في مبدأ الاحداثيات تأخذ المعادلة السابقة الشكل :

$$(2) \quad x^2 + y^2 = R^2$$

من (١) نرى أن الشكل العام لمعادلة الدائرة هو

$$(3) \quad f(x, y) \equiv x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

نربطه أن يكون :

$$D^2 + E^2 - 4F > 0$$

٣ - تعطينا المعادلتان :

$$(4) \quad x = R \cos \theta ; \quad y = R \sin \theta$$

نمثلاً وسطياً للدائرة (٢) .

كما انه إذا عوضنا في (4) كل $t = \tan \frac{\theta}{2}$ نحصل على التمثيل الوسطي :

$$x = R \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad ; \quad y = \frac{2 R t}{1 + t^2}$$

٤ - ان المعادلة القطبية لدائرة يقع مركزها في النقطة $c (r_1, \theta_1)$ هي :

$$r^2 + r_1^2 - 2 r r_1 \cos (\theta - \theta_1) - R^2 = 0$$

فاذا كان القطب في نقطة الاصل ($r_1 = 0$) فنحنند يكون الشكل :

$$r = R$$

اما إذا كان القطب يقع على محيط الدائرة ($r_1 = R$) فنحنند يكون :

$$r = 2 R \cos (\theta - \theta_1)$$

٥ - معادلة الدائرة المارة بالنقط الثلاث (x_1, y_1) و (x_2, y_2) و (x_3, y_3) هي :

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

٦ - يشترك كل مستقيم في المستوي مع الدائرة « شأن كل منحنيات الدرجة الثانية » على الاكثر بنقطتين . فاذا اشترك المستقيم مع الدائرة بنقطتين دعي قاطعاً وإذا اشترك بنقطة واحدة ، أو بالأحرى ، بنقطتين منطقتين دعي مماساً .

معادلة المماس للدائرة (1) الذي ميله m هي :

$$y = m x - am + b \quad \mp R \sqrt{1 + m^2}$$

والدائرة (2) هو :

$$y = m x \mp R \sqrt{1 + m^2}$$

ومعادلة المماس للدائرة (1) في نقطة واقعة عليها (x_1, y_1) هي :

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = R^2$$

والدائرة (2) هي :

$$x x_1 + y y_1 = R^2$$

اما ميل المماس m للدائرة (2) المار بالنقطة (x_1, y_1) فيتمين بالمعادلة :

$$(x_1^2 - R^2) m^2 - 2 x_1 y_1 m + y_1^2 - R^2 = 0$$

وهذه المعادلة تدلنا على أنه اما أن يمر مماسان في النقطة المفروضة اذا وقعت النقطة خارج الدائرة أو مماساً واحداً إذا وقعت النقطة على محيط الدائرة أو يستحيل رسم أي مماس من النقطة المفروضة إذا وقعت النقطة داخل الدائرة .

٧ - تعرف قوة نقطة ما P بالنسبة لدائرة بأنها حاصل ضرب القياس الجبري للأقطعتين اللتين تبدآن بـ P وتنتهيان في نقطتي تقاطع محور متحول مار بالنقطة P مع الدائرة المفروضة . ان قوة النقطة (x_0, y_0) بالنسبة للدائرة (3) هي : $f(x_0, y_0)$.

كما أنها تساوي حاصل طرح مربع نصف القطر من مربع بعد النقطة عن المركز .

والمحور الأساسي لدائرتين هو المحل الهندسي للنقط المتساوية القوى بالنسبة لهما .
ولذلك فان المحور الأساسي للدائرتين :

$$f_1(x, y) \equiv x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 = 0$$

$$f_2(x, y) \equiv x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2 = 0$$

هو المستقيم :

$$f_1(x, y) = f_2(x, y)$$

أي :

$$(D_1 - D_2) x + (E_1 - E_2) y + F_1 - F_2 = 0$$

والمركز الأساسي لثلاث دوائر هو النقطة التي لها القوة نفسها بالنسبة للدوائر الثلاث ولذلك فإن المحاور الأساسية الثلاثة للدوائر مأخوذة منثنى منثنى لتتلاقى في نقطة واحدة هي المركز الأساسي .

٨ - نقول عن دائرتين إنها متعامدان إذا كانتا متقاطعتين وكان المماسان على كل منهما في نقطة التقاطع متعامدين . ولذلك فشرط التعامد هو أن يكون مربع البعد بين المركزين يساوي مجموع مربعي نصفَي القطرين :

مسائل وتمارين محلولة

١٩٩ - اكتب معادلة الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC :

$$A(0, 0) ; B(10, 0) ; C(6, 8)$$

الحل :

إن الشكل العام لمعادلة دائرة هو :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

وحيث أن الدائرة تمر بالنقط A و B و C فإن إحداثيي كل من هذه

لنقط يحقق معادلة الدائرة وبذلك نجد :

$$c = 0$$

$$100 + 10a + c = 0$$

$$100 + 6a + 8b + c = 0$$

وبحل جملة المعادلات هذه نجد :

$$a = -10 ; b = -5 ; c = 0$$

فمعادلة الدائرة هي :

$$x^2 + y^2 - 10x - 5y = 0$$

أو نقول : استناداً إلى (٥) تكون المعادلة المطلوبة :

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 100 & 10 & 0 & 1 \\ 100 & 6 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

وبنشر هذا المعين نجد :

$$80 (x^2 + y^2) - 800 x - 400 y = 0$$

أو :

$$x^2 + y^2 - 10 x - 5 y = 0$$

وهذه هي المعادلة السابقة نفسها .

٢٠٠ - اجث عن نقط الدائرة .

$$x^2 + y^2 = 1$$

المتساوية البعد عن النقطتين $B (- 2 , 2)$ ، $A (1 , 3)$

الحل :

إذا كانت (x , y) نقطة متساوية البعد عن A و B فعندئذ

يكون :

$$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = (x - 1)^2 + (y - 3)^2$$

ومنه :

$$3 x + y = 1$$

وهذه هي معادلة المحل الهندسي للنقط المتساوية البعد عن A و B

(محور القطعة AB) .

والنقط المطلوبة هي عبارة عن الحل المشترك للمعادلتين :

$$3x + y = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

بحل هاتين المعادلتين نجد النقط المطلوبة :

$$(0, 1) , \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right)$$

٢٠١ - عين نقط تقاطع الدائرتين :

$$(1) \quad x^2 + y^2 + 2x - 2y - 18 = 0$$

$$(2) \quad x^2 + y^2 - 8x - 12y + 42 = 0$$

الحل :

نطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) فنجد (بعد الاختصار) .

$$(3) \quad x + y = 6$$

(وهذه معادلة المحور الأساسي للدائرتين وهو يمر بنقطتي تقاطع الدائرتين).

نعوض y من (3) بما يساويها في (1) فنجد (بعد الاختصار)

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

ومنه $x = 1$ أو $x = 3$ ، بالتعويض في (3) نجد أن نقطتي التقاطع هما :

$$(1, 5) ; (3, 3)$$

٢٠٢ - اكتب معادلة الدائرة التي مركزها النقطة $\omega (1, -2)$ والماسة

المستقيم :

$$3x + 4y - 5 = 0$$

الحل :

ان نصف قطر الدائرة هو بعد مركزها عن الماس ، أي :

$$r = \frac{|3 - 8 - 5|}{\sqrt{25}} = 2$$

فمعادلة الدائرة :

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$$

٢٠٣ - اكتب معادلة الدائرة المارة بالنقطتين $A(0, 2)$ و $B(0, 6)$

والمعامدة مع الدائرة :

$$(1) \quad x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$$

الحل :

يمكن كتابة المعادلة (1) بالشكل :

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

فمركز هذه الدائرة هو $(2, -1)$ ونصف قطرها 3 .

فإذا فرضنا (a, b) مركز الدائرة المطلوبة و r نصف قطرها ،
وعلمنا أن البعد بين المركزين يساوي مجموع مربعي نصفي قطري
الدائرتين المتعامدتين فعندئذ نجد :

$$(1) \quad (a - 2)^2 + (b + 1)^2 = r^2 + 9$$

وبما أن بعد كل من النقطتين A و B عن مركز الدائرة يساوي

نصف قطرها يكون :

$$(2) \quad a^2 + (b - 2)^2 = r^2$$

$$(3) \quad a^2 + (b - 6)^2 = r^2$$

وبحل هذه المعادلات الثلاث نجد :

$$a = b = 4 ; \quad r = \sqrt{20}$$

ومعادلة الدائرة المطلوبة هي :

$$(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 20$$

٢٠٤ - أوجد المحل الهندسي للنقطة M التي مجموع مربعي بعدها عن نقطتين ثابتتين A و B يساوي مقداراً ثابتاً h^2 .

الحل :

نبدأ أولاً باختيار المحاور الاحداثية بأبسط شكل ممكن ، فنضع محور السينات على AB ومحور العيّنات عمودي على القطعة AB في منتصفها . وإذا فرضنا أن A (a , 0) فعندئذ يكون B (- a , 0) .
ليكن x و y احداثيي M . عندئذ يكون .

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = h^2$$

أو :

$$(x - a)^2 + y^2 + (x + a)^2 + y^2 = h^2$$

ومنه نجد :

$$(1) \quad x^2 + y^2 = \frac{h^2}{2} - a^2$$

وبالعكس كل نقطة (x , y) تحقق (1) يكون مجموع مربعي بعدها عن A و B يساوي h^2 .

إن المعادلة (1) هي معادلة دائرة مركزها مبدأ الاحداثيات .
يشترط لتكون هذه الدائرة حقيقية ان يكون $h^2 > 2a^2$.

٢٠٥ - أوجد المحل الهندسي للنقطة M التي نسبة بعدها عن

نقطتين ثابتتين A و B تساوي نسبة ثابتة k .

الحل :

نختار محور السينات على المستقيم AB ومحور العيئات محور القطعة AB . وإذا فرضنا أن A (h , o) فعندئذ يكون B (- h , o) .

ليكن x و y احداثيي M فعندئذ يكون :

$$MA^2 = (x - h)^2 + y^2 ; \quad \overline{MB^2} = (x + h)^2 + y^2$$

ولكن : $\frac{MA}{MB} = k$ ؛ إذن :

$$(x - h)^2 + y^2 = k^2 [(x + h)^2 + y^2]$$

وبالاصلاح نجد :

$$(1) \quad x^2 + y^2 - 2 \cdot \frac{1 + k^2}{1 - k^2} \cdot h x + h^2 = 0$$

وبالعكس يمكن للقارىء أن يبرهن أن كل نقطة (x , y) تحقق

(1) تكون نسبة بعدها عن A و B تساوي k .

فالحل الهندسي هو الدائرة (1) .

٢٠٦ - لدينا المثلث ABC . أوجد تحليلياً الحل الهندسي للنقط M

من المستوي بحيث تكون المساقط القائمة A' و B' و C' على M على اضلاع

المثلث واقعة على استقامة واحدة (مستقيم سيمسون Simson) .

الحل :

نختار المحاور بحيث يقع محور السينات على الضلع BC وينطبق محور

العينات على الارتفاع المتعلق بالنقطة A فمندئذ يمكن اعتبار رؤوس المثلث معينة بالاحداثيات التالية :

$$A(0, a) ; B(b, 0) ; C(c, 0)$$

وتكون معادلة أضلاع المثلث BC و AB و AC على الترتيب هي :

$$(1) \quad y = 0$$

$$(2) \quad \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$$

$$(3) \quad \frac{x}{c} + \frac{y}{a} = 1$$

ويكون مسقط النقطة $M(x_1, y_1)$ على الضلع BC هو :

$$m_1(x_1, 0)$$

واما مسقط M على الضلع AB فيتعين بتقاطع الضلع AB مع
الناظم من M على AB والذي معادلته (معادلة مستقيم مار بـ M
ويوازي المنحى $(\frac{1}{b}, \frac{1}{a})$) هي :

$$(4) \quad b(x - x_1) = a(y - y_1)$$

بحل المعادلتين (2) و (4) نجد المسقط $m_2(x_2, y_2)$:

$$x_2 = \frac{b(a^2 + bx_1 - ay_1)}{b^2 + a^2} ; \quad y_2 = \frac{a(b^2 - bx_1 + ay_1)}{b^2 + a^2}$$

وباعادة الحسابات بالنسبة للضلع AC نجد أن المسقط $m_3(x_3, y_3)$

على AC هو :

$$x_3 = \frac{c(a^2 + c x_1 - a y_1)}{c^2 + a^2} ; y_3 = \frac{a(c^2 - c x_1 + a y_1)}{c^2 + a^2}$$

ولكي تقع النقط الثلاث m_1 و m_2 و m_3 على استقامة واحدة يلزم أن يكون :

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

أو (بفك المعين) :

$$(x_2 - x_1) y_3 + (x_1 - x_3) y_2 = 0$$

بالتعويض والاصلاح نجد المعادلة :

$$(5) \quad x_1^2 + y_1^2 - (b + c) x_1 - \frac{a^2 + c b}{a} y_1 + b c = 0$$

ويمكن بالعكس برهان أن مساقط كل نقطة من محيط الدائرة (1)

على أضلاع المثلث تقع على استقامة واحدة (نترك البرهان للقارىء) .

نلاحظ أن النقط A و B و C تقع على محيط الدائرة : فالحل الهندسي

المطلوب هو دائرة تمر برؤوس المثلث .

٢٠٧ - إذا فرضنا أن :

$$A(0, a) , B(b, 0) , C(c, 0)$$

١ - أوجد معادلة الدائرة K_1 المارة برؤوس المثلث ACB .

٢ - أوجد نقطة تلاقي الارتفاعات H . برهن أن نظير H بالنسبة

لـ BC يقع على K_1 .

٣ - أوجد معادلة الدائرة K_2 المارة بالمبدأ ومنتصفي BC و AH .

برهن أن هذه الدائرة تمر بمنتصفي الضلعين AB و AC ومنتصفي
BH و CH وبمسقط B على AC وبمسقط C على AB .
٤ - برهن أن نصف قطر K_1 يساوي قطر K_2 .

الحل :

١ - ان معادلة الدائرة K_1 هي :

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ a^2 & 0 & a & 1 \\ b^2 & b & 0 & 1 \\ c^2 & c & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

أي :

$$a (x^2 + y^2) - a(b + c)x - (a^2 + cb)y + acb = 0$$

٢ - من أجل إيجاد نقطة تلاقي الارتفاعات H نلاحظ أن هذه النقطة
تقع على محور العينات ولذلك يكفي أن نعين ترتيبها h .
من أجل ذلك نلاحظ ان :

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} =$$

ومنه :

$$-bc + h(-a) = 0$$

$$h = \frac{-bc}{a}$$

ولذلك فان احداثيات نظير H بالنسبة ل BC هي :

$$(0, \frac{bc}{a})$$

وهي تقع على الدائرة K_1 لأنه إذا بدلنا في معادلة الدائرة وجدنا :

$$a \left(\frac{b^2 c^2}{a^2} \right) - (a^2 + cb) \frac{b c}{a} + a c b = 0$$

٣- لإيجاد معادلة الدائرة K_2 نلاحظ انها تمر بالنقط :

$$(0, 0), \left(\frac{c+b}{2}, 0 \right), \left(0, \frac{a^2 - bc}{2a} \right)$$

ولذلك فإن معادلتها هي :

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \left(\frac{c+b}{2} \right)^2 & \frac{c+b}{2} & 0 & 1 \\ \left(\frac{a^2 - bc}{2a} \right)^2 & 0 & \frac{a^2 - bc}{2a} & 1 \end{vmatrix}$$

أي :

$$x^2 + y^2 - \frac{c+b}{2} x - \frac{a^2 - bc}{2a} y = 0$$

يلاحظ بسهولة ان منتصفات AB, AC, BH, CH وهي :

$$\left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2} \right), \left(\frac{c}{2}, \frac{a}{2} \right), \left(\frac{b}{2}, \frac{-bc}{2a} \right), \left(\frac{c}{2}, \frac{-bc}{2a} \right)$$

تحقق المعادلة المفروضة .

للحصول على مسقط B على AC نعلم ان معادلة AC هي :

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{a} = 1$$

ومعادلة الارتفاع النازل من B على AC هي :

$$c (x - b) - a y = 0$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد :

$$x = \frac{c (a^2 + b c)}{a^2 + c^2} ; \quad y = \frac{a (c^2 - b c)}{a^2 + c^2}$$

بالتبديل في معادلة الدائرة K_2 نجد أنها محققة وهذا يعني أن مسقط

B على AC يقع على الدائرة المفروضة K_2 .

بنفس الطريقة نجد مسقط C على AB .

$$x = \frac{b (a^2 + b c)}{a^2 + b^2} , \quad y = \frac{a (b^2 - b c)}{a^2 + b^2}$$

وبالتبديل في معادلة الدائرة K_2 نتأكد من أن مسقط C على

AB يقع عليها .

٤ - يمكن كتابة معادلة الدائرة K_1 على الشكل :

$$\left(x - \frac{b + c}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{a^2 + c b}{2 a} \right)^2 =$$

$$\left(\frac{b + c}{2} \right)^2 + \left(\frac{a^2 + c b}{2 a} \right)^2 - c b$$

وهذا يدلنا على أن مربع نصف قطر الدائرة هو :

$$R_1^2 = \frac{a^2 b^2 + a^2 c^2 + c^2 b^2 + a^4}{4 a^2}$$

كما أنه يمكن كتابة معادلة الدائرة K^2 على الشكل :

$$\left(x - \frac{c+b}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{a^2 - bc}{4a}\right)^2$$

$$= \left(\frac{c+b}{4}\right)^2 + \left(\frac{a^2 + bc}{2c}\right)^2$$

وهذا يدلنا على أن مربع نصف قطر الدائرة هو :

$$R_2^2 = \frac{a^2 b^2 + a^2 c^2 + c^2 b^2 + a^2}{16 a^2}$$

ومنه نجد :

$$R_1^2 = 4 R_2^2$$

أو :

$$R_1 = 2 R_2$$

ومنه نرى أن نصف قطر الدائرة K_1 يساوي قطر الدائرة K_2 .

وهو المطلوب .

٢٠٨ - لدينا النقط $A(a, o)$ ، $B(b, o)$ ، $C(o, a)$ في المستوى المنسوب لمجموعة محاورين متعامدين .

١ - لتكن M نقطة ما من ox . اكتب معادلة الدائرتين الماريتين برؤوس المثلث BCM ، ACM .

٢ - احسب احدائيات مركزي الدائرتين ω_1 ، ω_2 ونصفي قطريهما R_1 و R_2 والبعد بين المراكز .

٣ - اذا تحركت M على ox برهن أن كلا من ω_1 و ω_2

برسم مستقيما وان النسبة $\frac{R_1}{R_2}$ تساوي كمية ثابتة .

٤ - اكتب معادلة خط المركزين Δ . برهن انه عندما تتحرك M ير في كل نقطة من نقط المستوي مثل P مستقيمان Δ . أوجد المحل الهندسي لـ P عندما يتعامد المستقيمان Δ .

الحل :

لنرمز بـ λ لفاصلة النقطة M فعندئذ تكون معادلة الدائرة المارة برؤوس المثلث ACM هي :

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ a^2 & 0 & a & 1 \\ a^2 & a & 0 & 1 \\ \lambda^2 & \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

او بعد نشر المعين والاختصار :

$$x^2 + y^2 - (\lambda + a) x - (\lambda + a) y + a \lambda = 0$$

بنفس الطريقة نجد معادلة BCM :

$$x^2 + y^2 - (\lambda + b) x - \frac{a^2 + b \lambda}{a} y + b \lambda = 0$$

٢ - من معادلتى الدائرتين نستنتج ان مركز الدائرة الاولى ω_1 هو :

$$\omega_1 \left(\frac{\lambda + a}{2}, \frac{\lambda + a}{2} \right)$$

وان نصف قطرها :

$$R_1 = \sqrt{\frac{\lambda^2 + a^2}{2}}$$

وأما مركز الدائرة الثانية ω_2 فهو يقع في النقطة :

$$\omega_2 \left(\frac{\lambda + b}{2}, \frac{a^2 + b\lambda}{2a} \right)$$

وأما نصف قطرها فهو :

$$R_2 = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)(\lambda^2 + a^2)}}{2a}$$

وأما البعد بين المراكز فيتعين من دستور البعد بين نقطتين

ويكون :

$$\overline{\omega_1 \omega_2}^2 = \left(\frac{\lambda + b}{2} - \frac{\lambda + a}{2} \right)^2 + \left(\frac{a^2 + b\lambda}{2a} - \frac{\lambda + a}{2} \right)^2$$

ومنه :

$$\overline{\omega_1 \omega_2}^2 = \frac{(a - b)^2}{4} \left(1 + \frac{\lambda^2}{a^2} \right)$$

٣ - إذا رمزنا لاحتياي ω_1 بـ x_1 و y_1 فعندئذ يكون :

$$y_1 = x_1$$

وهذا يعني ان ω_1 ترسم مستقيماً ماراً بالمبدأ .

وإذا رمزنا لاحتياي ω_2 بـ x_2 و y_2 فعندئذ يكون :

$$x_2 = \frac{b + \lambda}{2}, \quad y_2 = \frac{a}{2} + \frac{b}{2a} \lambda$$

ومجذوف الوسيط من هاتين المعادلتين نجد المحل الهندسي لـ ω_2 وهو :

$$y = \frac{a^2 - b^2}{2a} + \frac{b}{a} x$$

وهذه معادلة مستقيم ميله $\frac{b}{a}$

وإذا حسبنا النسبة بين R_1 و R_2 وجدنا :

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

وهي نسبة ثابتة :

٤ - خط المركزين هو المستقيم المار بالنقطتين ω_1 و ω_2 ولذلك فان معادلته هي :

$$2ay - 2\lambda x + \lambda^2 - a^2 = 0$$

وإذا كانت $P(x_0, y_0)$ نقطة ما من المستوي فتكون واقعة على خط المركزين إذا كان :

$$\lambda^2 - 2\lambda x_0 + 2ay_0 - a^2 = 0$$

وهذه المعادلة (وهي من الدرجة الثانية بالنسبة لـ λ) تعين لنا بوجه عام قيمتين لـ λ يوافقها خطين مركزيين مارين بـ P .

ويكون هذان المستقيمان متعامدين إذا كان جداء الجذرين في المعادلة الاخيرة مساوياً لـ 1 - أي إذا كان :

$$2ay_0 - a^2 = -1$$

ومنه :

$$y_0 = \frac{a^2 - 1}{2a}$$

وهذه معادلة مستقيم مواز لمحور السينات :

٢٠٩ - لدينا النقطتان $A(a, 0)$ ، $B(0, b)$ والدائرة K_1 التي مركزها النقطة (a, μ) والمماس لـ ox والدائرة K_2 التي مركزها النقطة (ν, b) والمماس لـ oy .

- ١ - أوجد معادلتين K_1 و K_2 ومعادلة محورها الأسامي Δ .
- ٢ - اكتب شرط تعامد الدائرتين المذكورتين .
- ٣ - برهن انه إذا تحولت الدائرتان وبقينا متعامدين فمحورهما الأسامي Δ يمر بنقطة ثابتة .

الحل :

- ١ - لما كانت الدائرة K_1 تمس محور السينات فان نصف قطرها يساوي ترتيب مركزها ، ولذا فإن معادلتها هي :

$$(x - a)^2 + (y - \mu)^2 = \mu^2$$

- ولما كانت الدائرة K_2 تمس محور العينات فان نصف قطرها يساوي فاصلة مركزها ، فمعادلتها هي :

$$(x - \nu)^2 + (y - b)^2 = \nu^2$$

وتكون معادلة المحور الاسامي لهاتين الدائرتين هي :

$$(x - a)^2 + (y - \mu)^2 - \mu^2 = (x - \nu)^2 + (y - b)^2 - \nu^2$$

أي :

$$(1) \quad 2(v - a)x + 2(b - \mu)y + a^2 - b^2 = 0$$

٢ - كي تتعامد الدائرتان K_1 و K_2 يلزم أن يكون مربع البعد بين المركزين مساوياً لمجموع مربعي نصفَي القطرين :

$$(v - a)^2 + (b - \mu)^2 = v^2 + \mu^2$$

أو :

$$(2) \quad 2av + 2b\mu = a^2 + b^2$$

٣ - لنحسب قيمة v من المعادلة (2) ولنعوّضها في (1) فنجد بعد ترتيب المعادلة التي نحصل عليها بالنسبة لـ μ .

$$2(bx + ay)\mu + [(a^2 - b^2)x - 2aby - a(a^2 - b^2)] = 0$$

ويلاحظ أن هذه المستقيمتين « μ وسيطة » تمر جميعها بنقطة تقاطع المستقيمين :

$$2(bx + ay) = 0$$

$$(a^2 - b^2)x - 2aby - a(a^2 - b^2) = 0$$

أي من النقطة :

$$x = \frac{a(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{b(b^2 - a^2)}{b^2 + a^2}$$

وهو المطلوب :

٢١٠ - برهن أن فضل مربعي مماسين مرسومين من نقطة P إلى دائرتين مفروضتين يساوي إلى ضعف حاصل ضرب البعد بين المركزين في بعد النقطة عن المحور الأسامي للدائرتين :

الحل :

من المعلوم أن مربع طول مماس لدائرة ما يساوي قوة النقطة

بالنسبة لهذه الدائرة وإذا اتخذنا خط المركزين محوراً للسينات وافترضنا ان فاصلة مركز الأولى هو a وفاصلة مركز الثانية هو b فعندئذ تكون معادلتا الدائرتين هما :

$$x^2 + y^2 - 2 a x + c_1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2 b x + c_2 = 0$$

ويكون الفضل بين مربعي بماسين مرسومين من نقطة $p (x_1, y_1)$ لهاتين الدائرتين هو :

$$(x_1^2 + y_1^2 - 2 b x_1 + c_2) - (x_1^2 + y_1^2 - 2 a x_1 + c_1) =$$

$$(1) \quad = 2 (a - b) x_1 + c_2 - c_1$$

ولكن معادلة المحور الأساسي هي :

$$2 (a - b) x + c_2 - c_1 = 0$$

أو :

$$x = \frac{c_1 - c_2}{2(a-b)}$$

ويكون بعد النقطة P عن هذا المستقيم هو .

$$x_1 - \frac{c_1 - c_2}{2(a-b)}$$

ولما كان البعد بين المركزين هو $(a - b)$ فإن ضعف حاصل ضرب

بعد النقطة P عن المحور الأساسي في البعد بين المركزين هو :

$$2 (a - b) x_1 + c_2 - c_1$$

وبالمقارنة مع (1) نجد صحة المطلوب .

٢١١ - أوجد المركز الاسامي للدوائر الثلاث :

$$(1) \quad x^2 + y^2 + 6x + 11y - 125 = 0$$

$$(2) \quad x^2 + y^2 - 2x - 5y - 5 = 0$$

$$(3) \quad x^2 + y^2 - 36 = 0$$

ثم احسب أطوال المماسات من هذه النقطة للدوائر الثلاث .

الحل :

ان المحور الاسامي للدائرتين (1) و (3) هو :

$$x^2 + y^2 + 6x + 11y - 125 - (x^2 + y^2 - 36) = 0$$

أو :

$$(4) \quad 6x + 11y - 89 = 0$$

بنفس الطريقة نجد المحور الاسامي للدائرتين (2) و (3) :

$$(5) \quad 2x + 5y - 31 = 0$$

المستقيمان (4) و (5) يتقاطعان بالنقطة :

$$x = 13 \quad \text{و} \quad y = 1$$

وهي المركز الاسامي المطلوب .

أما اطوال المماسات المرسومة من هذه النقطة للدوائر الثلاث فهي متساوية لأنها تساوي قوة النقطة بالنسبة لكل من الدوائر الثلاث . وعلى هذا فاننا نحصل على مربع طول المماس بتبديل احداثيات المركز الاسامي في الطرف الايسر من واحدة من معادلات الدوائر الثلاث (1) و (2) و (3) :

$$169 + 1 - 36 = 134$$

وطول المماس إذن : $\sqrt{134}$

٢١٢ - اكتب معادلة الدائرة التي مركزها يقع على المستقيم :

$$(1) \quad 2x + 3y = 0$$

ومس المستقيمين :

$$(2) \quad 4y - 3x - 8 = 0$$

$$(3) \quad 4y + 3x + 24 = 0$$

في الزاوية التي تحوي نقطة الأصل :

٢ - أوجد معادلات المماسات لهذه الدائرة الموازية للمستقيم .

$$2x + 5y - 7 = 0$$

٣ - أوجد معادلات المماسات لهذه الدائرة من نقط تقاطعها مع

محور السينات .

٤ - أوجد معادلات المماسات لهذه الدوائر التي تمر بالنقطة $(-3, 5)$.

الحل :

١ - إذا افترضنا a و b إحداثيات مركز الدائرة فإنه يكون :

$$(4) \quad 2a + 3b = 0$$

وذلك لأن المركز يقع على المستقيم (١) .

ولما كان المستقيمان (٢) و (٣) يسان الدائرة فإن مركزها يقع

على احد منصفات الزاوية الحادة بينها . ومعادلات هذه المنصفات هي:

$$\frac{4y - 3x - 8}{\sqrt{25}} = \pm \frac{4y + 3x + 24}{\sqrt{25}}$$

أي :

$$x = \frac{-16}{3}$$

$$y = -2 \quad \text{و}$$

ولكن النصف الذي يقع مع نقطة الاصل في نفس الزاوية هو :

$$y = -2$$

وهكذا نجد انه يلزم أن يكون :

$$b = -2$$

من المعادلة (4) نجد :

$$a = 3$$

واما نصف قطر الدائرة فيساوي بعد مركزها عن احد المماسات :

$$R = \frac{|4(-2) - 3(3) - 8|}{\sqrt{25}} = 5$$

ومعادلة الدائرة المطلوبة هي :

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$$

أو :

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$$

٢ - ان معادلات المماسات المطلوبة هي من الشكل .

$$2x + 5y + h = 0 \quad (5)$$

بالتعويض في معادلة الدائرة كل y بما يساويها بدلالة x من المعادلة

الاحيرة ثم بالترتيب بالنسبة لـ x نجد :

$$29x^2 + 2(2h - 95)x + h^2 - 20h - 300 = 0$$

وحق يكون (5) مماساً للدائرة المفروضة يلزم أن ينعدم مميز المعادلة الاحيرة :

$$(2h - 95)^2 - 29(h^2 - 20h - 300) = 0$$

ومنه نجد :

$$h = 4 \mp 5\sqrt{29}$$

فالمماسان المطلوبان هما :

$$2x + 5y + 4 \mp 5\sqrt{29} = 0$$

٣ - للحصول على نقط تقاطع محور السينات مع الدائرة ، نعوض كل y بصفر فنجد :

$$x^2 - 6x - 12 = 0$$

ومنه :

$$x = 3 \mp \sqrt{21}$$

ولما كانت معادلة المماس للدائرة المفروضة في نقطة (x_1, y_1) واقعة عليها هي :

$$x_1x + y_1y - 3(x + x_1) + 2(y + y_1) - 12 = 0$$

فمن اجل نقطتي التقاطع .

$$(3 + \sqrt{21}, 0) \quad , \quad (3 - \sqrt{21}, 0)$$

نجد المعادلتين الآتيتين :

$$2y + \sqrt{21} x = 21 + 3\sqrt{21}$$

$$2y - \sqrt{21} x = 21 - 3\sqrt{21}$$

٤ - ان المعادلات الوسيطة للمستقيم المار بالنقطة (5 , - 3) والذي

امثال توجييه (α , β) هي :

$$(6) \quad \begin{cases} x = -3 + \alpha \rho \\ y = 5 + \beta \rho \end{cases}$$

انعين α و β على شكل يكون فيه المستقيم (6) مماساً للدائرة

لنعوض في معادلة الدائرة ولنرتب بالنسبة لـ ρ فنجد :

$$(\alpha^2 + \beta^2) \rho^2 + 2(7\beta - 6\alpha) \rho + 60 = 0$$

ويكون لهذه المعادلة جنر مضاعف إذا كان :

$$(7\beta - 6\alpha)^2 - 60(\alpha^2 + \beta^2) = 0$$

فاذا اصلحنا هذه المعادلة وقسمنا الطرفين على α^2 ولاحظنا أن ميل

المماس المطلوب هو $m = \frac{\beta}{\alpha}$ وجدنا :

$$11m^2 + 84m + 24 = 0$$

ومنه :

$$m = \frac{-42 \pm 10\sqrt{15}}{11}$$

وتكون المعادلات المطلوبة هي :

$$\frac{y - 5}{x + 3} = \frac{-42 \pm 10 \sqrt{15}}{11}$$

٢١٣ - اكتب معادلات المماسات المشتركة للدائرتين :

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 - 16y + 60 = 0$$

واحسب احداثيات نقط التماس :

الحل :

إذا رمزنا بـ ω_1 و ω_2 لمركزي الدائرتين و R_1 و R_2 لنصفيه قطريهما كان :

$$\omega_1 (0, 0) \quad , \quad \omega_2 (0, 8)$$

$$R_1 = 5 \quad , \quad R_2 = 2$$

لنفرض أن معادلة المماس هي من الشكل :

$$(1) \quad y = m x + h$$

لنكتب الآن أن بعد كل من المركزين عن المماس (١) يساوي نصف قطر الدائرة الموافق :

$$(2) \quad h^2 = 25 (1 + m^2)$$

$$(3) \quad (8 - h)^2 = 4 (1 + m^2)$$

من (2) و (3) نجد :

$$4h^2 = 25(8 - h)^2$$

ويكون :

$$h_1 = \frac{40}{3} , \quad h_2 = \frac{40}{7}$$

بالتعويض بالمعادلة (2) نجد :

$$m = \pm \frac{\sqrt{55}}{3} ; m = \pm \frac{\sqrt{15}}{7}$$

وتكون بالتالي معادلات المماسات الأربعة هي :

$$y = \mp \frac{\sqrt{55}}{3} x + \frac{40}{3}$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{15}}{7} x + \frac{40}{7}$$

وأما نقط التماس فهي النقط المشتركة بين كل من الدائرتين والمستقيمت الأربعة .

ولذلك نحل معادلة كل من الدائرتين مع المستقيمت الأربعة على التوالي فنجد نقط التماس الثانية .

ولكنه يمكن بطريقة ثانية الوصول إلى نفس النتيجة وذلك إذا لاحظنا أن المماس عمودي على نصف القطر في نقطة التماس . وحيث أن ميل المماس (1) هو m فيكون ميل نصف القطر الموافق $-\frac{1}{m}$ وتكون معادلة نصف القطر الموافق للدائرة الأولى هي :

$$y = -\frac{1}{m} x$$

ونقط تقاطعه مع المماس (1) هي :

$$\left(\frac{-m h}{1+m^2}, \frac{h}{1+m^2} \right)$$

فنقط التماس الأربع على الدائرة الأولى هي :

$$\left(-\frac{5\sqrt{55}}{8}, \frac{15}{8} \right), \left(\frac{5\sqrt{55}}{8}, \frac{15}{8} \right)$$

$$\left(-\frac{5\sqrt{15}}{8}, \frac{35}{8} \right), \left(\frac{5\sqrt{15}}{8}, \frac{35}{8} \right)$$

وتكون معادلة نصف القطر الموافق للدائرة الثانية هي :

$$y = 8 - \frac{1}{m} x$$

ونقط تقاطعه مع المماس (1) هي :

$$\left(\frac{m(8-h)}{1+m^2}, \frac{h+8m^2}{1+m^2} \right)$$

وتكون نقط التماس الأربع على الدائرة الثانية :

$$\left(-\frac{\sqrt{55}}{4}, \frac{35}{4} \right), \left(\frac{\sqrt{55}}{4}, \frac{35}{4} \right)$$

$$\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{25}{4} \right), \left(+\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{25}{4} \right)$$

٢١٤ - لدينا الدائرة :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

P نقطة ما على هذه الدائرة و P' نقطة على المستقيم OP تحقق العلاقة :

$$(1) \quad OP \cdot OP' = k^2$$

ما هو المحل الهندسي للنقطة P' عندما ترسم P محيط الدائرة المفروضة. ميز حسب القيم المختلفة لـ c .

الحل :

لنكتب معادلة الدائرة المفروضة في الاحداثيات القطبية متخذين مبدأ المحاور قطباً ومحور السينات محوراً قطبياً فعندئذ يكون ، إذا رمزنا بـ r و φ للاحداثيات القطبية للنقطة P .

$$x = r \cos \varphi \quad , \quad y = r \sin \varphi$$

بالتعويض في معادلة الدائرة نجد :

$$(2) \quad r^2 - 2r(a \cos \varphi + b \sin \varphi) + c = 0$$

واستناداً إلى (1) يكون ، إذا رمزنا بـ (r_1, φ_1) للاحداثيات القطبية للنقطة P :

$$r r_1 = k^2$$

بالتعويض في (2) يكون :

$$c r_1^2 - 2 k^2 r_1 (a \cos \varphi_1 + b \sin \varphi_1) + k^4 = 0$$

فاذا كان $c = 0$ فعندئذ يكون :

$$2 r_1 (a \cos \varphi_1 + b \sin \varphi_1) = k^2$$

أو :

$$2 a x_1 + 2 b y_1 = k^2$$

وهذه معادلة مستقيم .

أما إذا كان $c \neq 0$ فعندئذ يكون المحل الهندسي للنقطة P .

$$x_1^2 + y_1^2 - 2 \frac{k^2}{c} (a x_1 + b y_1) + k^4/c = 0$$

وهذه معادلة دائرة .

إننا ندعو النقطة P' النقطة المعاكسة لـ P بنسبة تعاكس k ومركز تعاكس هو نقطة الأصل . ومن المسألة نستنتج أن المنحني المعاكس لدائرة هو مستقيم أو دائرة حسبما يقع مركز التعاكس على محيط الدائرة ($c = 0$) أو لا يقع .

ومن التعريف (1) نرى أن النقطة المعاكسة لـ P' هي P نفسها ، ولذلك نستنتج أن المنحني المعاكس لمستقيم هو المستقيم نفسه أو دائرة حسبما يمر المستقيم في مركز التعاكس أو لا يمر .

٢١٥ - لدينا الدائرتان K_1 و K_2 المتقاطعتان في النقطتين P و Q ولدينا مستقيم g يمر بالنقطة P . برهن أنه يوجد في الحالة العامة أربع دوائر تمس كلًا من K_1 و K_2 و g .

الحل :

إذا اتخذنا النقطة P مركزاً للتعاكس فإن المنحنيات المعاكسة للدوائر K_1 و K_2 تكون عبارة عن مستقيمين متقاطعين لا يمران في P . ويكون المنحني المعاكس لـ g هو مستقيم يمر في P . وأما المنحني المعاكس للدائرة المطلوبة K فهو بالحالة العامة عبارة عن دائرة تمس المستقيمتين الثلاثة . ولما كانت المستقيمتين الثلاثة تشكل مثلثاً .

فانه يوجد أربع دوائر تمس أضلاع المثلث . وتكون المنحنيات المعاكسة لهذه الدوائر الأربع عبارة عن أربع دوائر تشكل حلول المسألة المطلوبة .

مسائل وتمارين غير محلولة

٢١٦ - أوجد معادلة الدائرة المارة برؤوس المثلث المتشكل من المستقيبات الثلاثة .

$$3x + y - 22 = 0 \quad , \quad 2x + y - 14 = 0$$

$$x + y - 8 = 0$$

٢١٧ - أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة (1 , 2 -) وتمس المستقيم

$$3x - 2y - 6 = 0$$

في النقطة : (3 , 4)

٢١٨ - لدينا المثلث A(5,0) و B(1 , 2) و C (3 , 2) و D و E و F

هي منتصفات أضلاع المثلث . برهن أن نصف قطر الدائرة ABC هو ضعف نصف قطر الدائرة DEF .

٢١٩ - أوجد معادلتى الدائرتين الماسيتين للمستقيمين .

$$4x + 3y - 7 = 0 \quad \text{و} \quad 3x - 4y + 1 = 0$$

والمارتين من النقطة (3 , 2) .

٢٢٠ - أوجد معادلة الدائرة المرسومة داخل المثلث المعين بتقاطع

المستقيبات :

$$3x + 4y - 5 = 0$$

$$7x - 24y + 55 = 0$$

$$4x - 3y - 65 = 0$$

٢٢١ - أوجد معادلة الدائرة المرسومة ضمن المثلث الذي رؤوسه :

$$\left(\frac{31}{5}, 0\right), (-1, 3), (3, 6)$$

٢٢٢ - برهن أن المستقيم $4x + 2y = 15$ يمس الدائرة :

$$4(x - 2)^2 + 4(y - 1)^2 = 5$$

عين نقطة التماس :

٢٢٣ - عين الدائرة المارة برؤوس المثلث المعين بتقاطع المستقيمتان :

$$4x + y - 17 = 0$$

$$2x + 3y - 1 = 0$$

$$x - y + 2 = 0$$

٢٢٤ - برهن أن الدائرتين :

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y - 7 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 10x + 7 = 0$$

متقاطعتان ، ثم عين نقطتي تقاطعها .

٢٢٥ - برهن أن الدائرتين :

$$x^2 + y^2 - ax = 0$$

$$x^2 + y^2 - by = 0$$

متعامدتان مهما كانت قيم a و b .

٢٢٦ - برهن ان كل دائرة (a و b وسيطان) :

$$x^2 + y^2 - 2ax + b^2 = 0$$

تتعامل مع كل دائرة (b و c وسيطان) :

$$x^2 + y^2 - 2cy - b^2 = 0$$

٢٢٧ - أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة (2 , - 1) وتتعامد مع كل من الدائرتين :

$$x^2 + y^2 = 6y \quad ; \quad x^2 + y^2 - 4x - 4y = 1$$

٢٢٨ - عين نقط محور السينات التي يكون طول المماس المنشأ منها على الدائرة :

$$x^2 + y^2 - 6y + 6 = 0$$

مساوياً طول المماس المنشأ على الدائرة :

$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$

٢٢٩ - لدينا الدائرتان :

$$x^2 + y^2 - 3x + 5y - 2 = 0$$

$$2x^2 + 2y^2 - 8x + 4y - 1 = 0$$

أوجد معادلة المحور الاسامي لهما . ثم عين نقط محور العينات المتساوية القوى بالنسبة للدائرتين المفروضتين

٢٣٠ - أوجد نقطتي تقاطع الدائرة :

$$r = 4 \cos \varphi$$

$$r \cos \varphi = 3 \quad \text{مع المستقيم}$$

ثم برهن أن هاتين النقطتين مع نقطة الأصل تشكل مثلثاً متساوي الساقين .

المجموعة

- $$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 &= 0 & - ٢١٦ \\ (x + \frac{2}{7})^2 + (y - \frac{41}{7})^2 &= \frac{1300}{49} & - ٢١٧ \\ (x - \frac{6}{5})^2 + (y - \frac{12}{5})^2 &= 1 & - ٢١٨ \\ \\ x^2 + y^2 - 20x + 75 &= 0 & - ٢٢٠ \\ (3, 1\frac{1}{2}) & & - ٢٢٢ \\ 7x^2 + 7y^2 - 34x - 48y + 103 &= 0 & - ٢٢١ \\ 5x^2 + 5y^2 - 32x - 8y - 34 &= 0 & - ٢٢٣ \\ (\frac{14}{13}, -\frac{21}{13}); (8, 3) & & - ٢٢٤ \\ (-3, 0) & & - ٢٢٦ \\ 4(x + 1)^2 + (2y + 3)^2 &= 49 & - ٢٢٧ \\ 2x + 6y &= 3 & - ٢٢٨ \\ y &= \frac{1}{2} & - ٢٢٩ \\ (2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}) (2\sqrt{3}, -\frac{\pi}{6}) & & - ٢٣٠ \end{aligned}$$

الفصل السادس

الكرة والدائرة في الفراغ

١ - الكرة هي الحل الهندسي للنقط في الفراغ التي تبعد عن نقطة ثابتة (نسمى مركز الكرة) بعداً ثابتاً (يسمى نصف قطر الكرة). فإذا كان $\omega(a, b, c)$ مركز الكرة و R نصف قطرها فعندئذ تكون معادلتها :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

وبالعكس كل معادلة من الشكل :

$$(1) \quad f(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2Bx + 2Cy + 2Dz + E = 0$$

تمثل كرة مركزها $\omega(-B, -C, -D)$ ونصف قطرها

$$\sqrt{B^2 + C^2 + D^2 - E}.$$

ولذلك فإن هذه الكرة لا تكون حقيقية إلا إذا كان $B^2 + C^2 + D^2 > E$.

٢ - المعادلات الوسيطة لسطح كرة نصف قطرها R ومركزها

$\omega(a, b, c)$ هي :

$$x = a + R \sin \theta \cos \varphi, \quad y = b + R \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = c + R \cos \theta$$

٣ - كل مستو في الفراغ إما أن يكون قاطعاً للكرة أو مماساً في نقطة

أو خارجاً عنها حسباً يكون بعد مركز الكرة عنه أصغر أو يساوي أو أكبر من نصف القطر.

٤ - من أجل إيجاد معادلة المستوى المماس لكرة مار من مستقيم معلوم
نشكل حزمة المستويات المارة من المستقيم ونعين أحدها الذي يبعد عن مركز
الكرة بمقدار نصف قطرها .

ومن أجل إيجاد معادلة المستوى المماس الموازي لمستو معلوم نشكل معادلة
المستويات الموازية لهذا المستوى ونعين أحدها الذي يبعد عن مركز الكرة بمقدار
نصف قطرها .

والمستوي المماس لكرة في نقطة عليها هو المستوى المار بالنقطة والعمودي
على نصف قطر الكرة الواصل الى نقطة التماس .

٥ - قوة النقطة $P(x_0, y_0, z_0)$ بالنسبة لكرة هو حاصل ضرب القياس
الجبري للقطعتين اللتين تبدآن بالنقطة P وتنتيان بنقط تقاطع محور متحرك مار
بالنقطة P مع الكرة ، وتقدر قوة النقطة P بالنسبة لـ (1) بـ $f(x_0, y_0, z_0)$.
والمستوي الاساسي لكرتين هو المحل الهندسي للنقط المتساوية للقوى بالنسبة لهما .

٦ - شرط تعامد كرتين هو أن يكون مجموع مربعي نصفي قطريهما يساوي
البعد بين مركزيهما وتكون الكرتان متاحتين خارجاً (أو داخلاً) إذا كان البعد
بين المركزين يساوي مجموع (فصل) نصفي قطريهما .

٧ - المستويات المماسية المشتركة لكرتين هي المستويات المماسية لإحدهما والمنبثقة من نقطتين
 A و B وهما النقطتان التامستان للقطعة المستقيمة الواصلة بين المركزين تقسيماً توافقياً
بنسبة نصفي قطري الكرتين .

٨ - إذا كان لدينا كرة معادلتها $S=0$ ومستو معادلته $P=0$ فإن المعادلة
 $S + \lambda P = 0$ تمثل حزمة كرات تمر جميعها بدائرة تقاطع الكرة المفروضة مع المستوى المفروض .

٩ - الدائرة في الفراغ هي تقاطع مستو مع كرة فهي تتعين بمعادلتين أحدهما
تمثل مستوياً والثانية تمثل كرة . وإذا كان بعد مركز الكرة عن المستوي d
فنحن إذ يكون نصف قطر الدائرة r معطى بالعلاقة :

$$r^2 = R^2 - d^2$$

مسائل وتمارين محلولة

٢٣١ - اكتب معادلة الكرة المارة برؤوس رباعي الوجوه المعين
بمعدلات وجوهه :

$$x = 0 , y = 0 , z = 0 , 2x + 3y + 6z = 6$$

الحل :

ان المستويات الأربعة تتقاطع في النقط .

$$(0, 0, 0) , (0, 0, 1) , (0, 2, 0) , (3, 0, 0)$$

بالتعويض في (١) نجد :

$$E = 0 , 1 + 2D = 0 , 4 + 4C = 0 , 9 + 6B = 0$$

ومنه :

$$B = -\frac{3}{2} , C = -1 , D = -\frac{1}{2} , E = 0$$

والمعادلة المطلوبة هي :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 2y - z = 0$$

٢٣٢ - أوجد نصف قطر الدائرة المعينة بالمعادلتين :

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 5 = 0$$

$$(2) \quad 2x - 8y + 7z - 4 = 0$$

الحل :

يمكن كتابة معادلة الكرة (١) بالشكل :

$$(x - 3)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = 14$$

مركزها (3 , 0 , 0) ونصف قطرها $R = \sqrt{14}$

ان بعد مركز الكرة عن المستوي (2) هو :

$$d = \frac{|6 - 4|}{\sqrt{117}} = \frac{2}{\sqrt{117}}$$

نصف قطره الدائرة r يتعين بالعلاقة :

$$r^2 = R^2 - d^2 = 14 - \frac{4}{117} = \frac{1634}{117}$$

٢٣٣ - اكتب معادلة المستوي المماس للكرة :

$$2(x^2 + y^2 + z^2) - 3x + 4y - z - 60 = 0$$

في النقطة $M(1, -4, 5)$.

الحل :

نلاحظ ان النقطة M واقعة على سطح الكرة ، كما أننا نجد بسهولة

ان مركز الكرة يقع في النقطة $\omega(\frac{3}{4}, -1, \frac{1}{4})$ وان أمثال توجيه

نصف القطر ωM هي : $(1, -12, 19)$.

ولما كان المستوي المماس هو المستوي المار بالنقطة M والعمودي على

ωM فمعادلته اذن : $(x - 1) - 12(y + 4) + 19(z - 5) = 0$

أو :

$$x - 12y + 19z = 144$$

٢٣٤ - أوجد معادلة المستويين المارين من المستقيم $x = y = z$

والماسين للكرة المعينة بالمعادلة :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z + 7 = 0$$

نم برهن أنها متعامدان :

الحل :

ان المستقيم المفروض هو الفصل المشترك للمستويين :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

ولذلك فان حزمة المستويات المارة بهذا المستقيم هي :

$$(1) \quad (1 + \lambda)x - y - \lambda z = 0$$

والمستويات المطلوب هي تلك المستويات من (1) التي يكون بعدها
عن مركز الكرة مساوياً لنصف قطر الكرة وبما أن مركز الكرة
هو $(-1, -2, 3)$ ونصف قطرها $\sqrt{7}$ فانه يكون :

$$\frac{(-1 - \lambda + 2 - 3\lambda)^2}{(1 + \lambda)^2 + 1 + \lambda^2} = 7$$

ومنه :

$$\lambda = \frac{11 \pm \sqrt{147}}{2}$$

ومعادلتا المستويين المماسين هما :

$$\left(1 + \frac{11 + \sqrt{147}}{2}\right) X - Y - \frac{11 + \sqrt{147}}{2} Z = 0$$

$$\left(1 + \frac{11 - \sqrt{147}}{2}\right) X - Y - \frac{11 - \sqrt{147}}{2} Z = 0$$

والمستويان متعامدان لأن :

$$\left(1 + \frac{11 + \sqrt{147}}{2}\right) \left(1 + \frac{11 - \sqrt{147}}{2}\right) + 1$$

$$+ \left(\frac{11 + \sqrt{147}}{2}\right) \left(\frac{11 - \sqrt{147}}{2}\right) = 0$$

٢٣٥ - اكتب معادلة المستوي الاساسي للكرتين :

$$2(x^2 + y^2 + z^2) - 3x = 0$$

$$5(x^2 + y^2 + z^2) + 2y - 1 = 0$$

الحل :

نضع الطرف الأول من المعادلة الاولى بعد تقسيمه على 2 مساوياً
للطرف الأول من المعادلة الثانية بعد تقسيمه على 5 فنجد :

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{3}{2}x = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2}{5}y - \frac{1}{5}$$

ومنه معادلة المستوي الاساسي :

$$15x + 4y - 2 = 0$$

٢٣٦ - اكتب معادلة الكرة المرسومة ضمن رباعي الوجوه المعين

بالمعادلات :

$$x + y + z = 1 \quad , \quad x + y = 0$$

$$z + x = 0 \quad y + z = 0$$

الحل :

إذا فرضنا أن $\omega(a, b, c)$ مركز الكرة و R نصف قطرها
وإذا كتبنا ان بعد هذا المركز عن كل من المستويات الأربعة مساو

لنصف القطر نجد :

$$\frac{|a + b + c - 1|}{\sqrt{3}} = \frac{|a + b|}{\sqrt{2}} = \frac{|a + c|}{\sqrt{2}} = \frac{|b + c|}{\sqrt{2}} = R$$

وهذه العلاقات تعطينا عدداً من الحلول نقبل منها الحل :

$$a = b = c = \frac{1}{3 + \sqrt{6}} , R = \frac{\sqrt{2}}{3 + \sqrt{6}}$$

وذلك لأن الكرة المطلوبة هي الكرة المرسومة ضمن رباعي الوجوه ، وهذا يعني أن على مركزها أن يقع في جانب واحد مع كل رأس بالنسبة للمستوي المقابل له . فرؤوس رباعي الوجوه هي :

$$(0, 0, 0), (-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1)$$

فمثلاً بالنسبة للمستوي $x + y + z - 1 = 0$ يقع الرأس المقابل $(0, 0, 0)$ والمركز بجانب واحد لأن كلا من هاتين النقطتين ذو قوة تحليلية سالبة بالنسبة للمستوي المفروض ونفس الأمر بالنسبة للرؤوس الأخرى .

ان معادلة الكرة المطلوبة اذن :

$$\left(x - \frac{1}{3 + \sqrt{6}}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3 + \sqrt{6}}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{3 + \sqrt{6}}\right)^2 = \frac{2}{(3 + \sqrt{6})^2}$$

٢٣٧ - احسب الزاوية الحاصلة من تقاطع كرتين واستنتج شرط التعامد بينها .

الحل :

ان الزاوية الحاصلة عند التقاطع هي الزاوية الحاصلة بين المستويين

المماسين المنشأين في نقطة من نقاط التقاطع على الكرتين المذكورتين .
وبما أن أنصاف الأقطار عمودية على المستويات المماسية في نقاط التماس .
اذن يكفي أن نحسب الزاوية بين نصفي القطرين اللذين يصلان المركز
بأحدى نقط التقاطع مثل P فإذا كانت هذه الزاوية θ وكانت
 $\omega(a, b, c)$ ، $\omega'(a', b', c')$ مركزي الكرتين R و R' نصفي
قطريهما فإنه يكون عندئذ « من المثلث $P \omega \omega'$:

$$\overline{\omega \omega'^2} = R^2 + R'^2 - 2 R \cdot R' \cos \theta$$

$$2 R R' \cos \theta = R^2 + R'^2 - (a - a')^2 - (b - b')^2 - (c - c')^2$$

وتتعامد الكرتان إذا كان $\theta = \frac{\pi}{2}$ أي $\cos \theta = 0$ ومنه نستنتج
أن شرط التعامد هو أن يكون مربع البعد بين المركزين مساوياً
لمجموع مربعي نصفي القطرين .

٢٣٨ - اكتب معادلة الكرة المارة بالدائرة .

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 1 \quad \text{والمماس للكرة}$$

الحل :

ان مركز الكرة يقع على العمود المنشأ على مستوي الدائرة من مركزها:
ولما كان مركز الدائرة يقع في النقطة $(0, 0, 0)$ ولما كان العمودي
على مستويها هو المحور oz فان مركز الكرة يقع على المحور oz
فاذا فرضنا ان احداثيات المركز هي $(0, 0, \mu)$ فعندئذ يكون

نصف قطر الكرة R هو البعد بين مركزها واحدى نقط الدائرة

$$R^2 = 25 + \mu^2 \quad \text{ولتكن تلك النقطة } (5, 0, 0) \text{ إذن :}$$

ومن جهة اخرى لما كانت الكرة الثانية مماسة للكرة المطلوبة فان
البعد بين المركزين يساوي مجموع نصفي القطرين اي :

$$\sqrt{0^2 + 4^2 + (1 - \mu)^2} = 1 + \sqrt{25 + \mu^2}$$

وبحل هذه المعادلة نجد :

$$R^2 = 25 + \left(\frac{341}{84}\right)^2 \quad : \quad \mu = \frac{-341}{84}$$

وتكون معادلة الكرة المطلوبة :

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{341}{42} z = 25$$

٢٣٩ - أوجد المحل الهندسي لمركز الكرة المارة بالنقطتين الثابتين

$P(a, b, 0)$ و $P'(a', b', 0)$ والمتعامدة مع الكرة :

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

الحل :

إذا فرضنا (X, Y, Z) هو مركز الكرة وإذا كتبنا أن بعد

هذا المركز عن النقطة P يساوي بعدها عن النقطة P' نجد :

$$(2) \quad X^2 - a^2 + (Y - b)^2 + Z^2 = (X - a')^2 + (Y - b')^2 + Z^2$$

نكتب بعد ذلك أن مجموع مربعي نصفي قطري الكرتين يساوي

مربع البعد بين المركزين نجد :

$$(3) \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2 + R'^2$$

ومن (2) و (3) نجد :

$$(4) \quad \begin{aligned} 2 a' X + 2 b' Y &= a'^2 + b'^2 + R^2 \\ 2 a X + 2 b Y &= a^2 + b^2 + R^2 \end{aligned}$$

ويتقاطع المستويات (4) بمستقيم مواز لـ oz هو المحل الهندسي المطلوب .

٢٤٠ - برهن ان الدائرتين

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y + 4z - 5 = 0 ; \quad 5y + 6z + 1 = 0$$

$$(2) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 4y + 5z - 6 = 0 ; \quad x + 2y - 7z = 0$$

تقعان على كرة . أوجد معادلة هذه الكرة .

الحل :

ان معادلة حزمة الكرات المارة بالدائرة (1) هي :

$$(3) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x + (3 + 5\lambda)y + (4 + 6\lambda)z - 5 + \lambda = 0$$

ومعادلة حزمة الكرات المارة بالدائرة (2) هي :

$$(4) \quad x^2 + y^2 + z^2 + (-3 + \mu)x + (-4 + 2\mu)y + (5 - 7\mu)z - 6 - 0$$

وكي تقع الدائرتان على كرة واحدة يجب ان نتمكن من إيجاد قيمة لـ λ

وقيمة لـ μ نجعلان المعادلة (3) هي المعادلة (4) نفسها . ان هذا

الأمر يتطلب أن يكون :

$$-2 = -3 + \mu ; \quad 3 + 5\lambda = -4 + 2\mu$$

$$4 + 6\lambda = 5 - 7\mu ; \quad -5 + \lambda = -6$$

ولهذه المعادلات الحل المشترك $\mu = 1 ; \lambda = -1$ فالدائرتان

تقعان على كرة واحدة نحصل عليها بتعويض $\lambda = -1$ في (3) أو $\mu = 1$ في (4) فنجد :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0$$

٢٤١ - اكتب معادلة الدائرة المارة بالنقط الثلاث $A(a, 0, 0)$ ، $B(0, b, 0)$ ، $C(0, 0, c)$ واحسب نصف قطرها :

الحل :

تتعين الدائرة المطلوبة بتقاطع المستوي المار من النقط الثلاث A, B, C وبأحدى الكرات التي تمر بهذه النقط الثلاث ولتكن تلك التي تمر بالإضافة إلى A, B, C بنقطة الاصل « شريطة أن يكون $a \cdot b \cdot c \neq 0$ » .

أما معادلة المستوي فهي :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

وأما معادلة الكرة فهي :

$$x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0$$

ومن أجل حساب نصف قطر الدائرة نحسب نصف قطر الكرة وبعد مركزها عن المستوي فيكون استناداً إلى (6) :

$$r^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - \frac{a^2 b^2 c^2}{4(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2)}$$

مسائل وتمارين غير محلولة

٢٤٢ - أوجد معادلة الكرة التي تكون فيها الدائرة المعينة بالمعادلتين :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 7y - 2z + 2 = 0$$

$$2x + 3y + 4z = 8$$

دائرة عظمى لها :

٢٤٣ - لدينا المستوي المار بالنقطة الثابتة (a, b, c) والقاطع

للمحاور الاحداثية في النقط A و B و C . برهن أن المحل الهندسي لمركز الكرات $OABC$ هو :

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$$

٢٤٤ - أوجد معادلة الكرة المارة بالدائرة ∴ :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 1 = 0 ; x + y - z - 1 = 0$$

وبنقطة الأصل .

٢٤٥ - برهن أن معادلات الكرات المارة بالنقط $(4, 1, 0)$ ،

$$2x + 2y - z = 11 \text{ والمساسة للمستوي } (1, 0, 0) , (2, -3, 4)$$

هي :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 5 = 0$$

$$16(x^2 + y^2 + z^2) - 102x + 50y - 49z + 86 = 0$$

٢٤٦ - برهن أن نصف قطر الدائرة :

$$- 245 -$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2\omega z + d = 0 \\ lx + my + nz = 0 \end{cases}$$

ولیکن r يحقق العلاقة :

$$(r^2 + d)(l^2 + m^2 + n^2) = (mw - nv)^2 + (nu - lw)^2 + (lv - mu)^2$$

٢٤٧ - برهن أن الكرتين :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 2z + 8 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 8y + 4z + 20 = 0$$

متعامدتان :

٢٤٨ - برهن أن كل كرة تمر من الدائرة المعينة بالمعادلتين :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax + r^2 = 0, \quad z = 0$$

تتقاطع عمودياً مع كل كرة مارة بالدائرة المعينة بالمعادلتين :

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad y = 0$$

الاجوبة

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 4 \quad - ٢٤٢$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 3y - 5z = 0 \quad - ٢٤٤$$

الفصل السابع

القطع الناقص

١ - القطع الناقص هو الحل الهندسي للنقط التي مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين ، تسميان المحرقين ، يساوي طولاً ثابتاً . وللقطع محوران تناظرين متعامدان .

٢ - لو نسبنا القطع إلى مجموعة عاور منطبقه على محوريه التناظرين لكنت معادلته :

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a و b تمثلان نصفي قطري القطع .

٣ - من التعريف الأول للقطع يمكننا أن نستنتج تعريفاً آخر : القطع الناقص هو الحل الهندسي للنقط التي نسبة بعدها عن نقطة ثابتة (محرق القطع) إلى بعدها عن مستقيم ثابت ، يسمى الدليل ، تساوي عدداً ثابتاً أصغر من الواحد يدعى بالتباعد المركزي وهو يساوي نسبة بعد المحرق عن مركز القطع إلى نصف القطر الكبير للقطع $\frac{c}{a}$. $(c^2 = a^2 - b^2)$.

٤ - المعادلة القطبية للقطع الناقص . وذلك إذا اخذنا احد محوريه قطباً والمحور الكبير محوراً قطبياً هي :

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \vartheta}$$

حيث e تمثل التباعد المركزي و p وسيط القطع .

- - تدعى الدائرة التي مركزها مركز القطع ونصف قطرها يساوي نصف القطر الكبير للقطع بالدائرة الأصلية . يمكن تصور القطع على أنه مسقط الدائرة الأصلية على مستو يصنع مع مستويها زاوية قدرها v نحقق العلاقة :

$$\cos v = \frac{b}{a}$$

- ٦ - تدعى الدائرة التي مركزها مركز القطع ونصف قطرها يساوي نصف القطر الصغير بالدائرة الثانوية .

- ٧ - يمكن تمثيل القطع الناقص وسيطياً بأشكال مختلفة أكثرها استعمالاً :

$$x = a \cos \varphi \quad y = b \sin \varphi$$

ومنها :

$$x = a \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \quad y = \frac{2u}{1 + u^2}$$

- ٨ - كل مستقيم في مستوي القطع الناقص يقطعه على الأكثر بنقطتين .

- ٩ - معادلة المماس الذي ممه m للقطع (١) هي :

$$y = m x \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

ومعادلة المماس للقطع من نقطة (x_0, y_0) واقعة عليه هي :

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1$$

أو (باستعمال التمثيل الوسيط للقطع) :

$$\frac{x \cos \varphi}{a} + \frac{y \sin \varphi}{b} = 1$$

حيث φ قيمة الوسيط الموافقة للنقطة (x_0, y_0) .

وميل المماسات المرسومة من نقطة ثابتة (x_0, y_0) إلى القطع الناقص (1)
 تعين بالمعادلة :

$$(x_0^2 - a^2) m^2 - 2 x_0 y_0 m + y_0^2 - b^2 = 0$$

والحل الهندسي للنقط التي يرى منها اللطح ضمن زاوية قائمة هو دائرة مركزها مركز القطع ومربع قطرها يساوي مجموع مربعي قطري اللطح .

١٠ - المحل الهندسي لمتصفات الأوتار الموازية لاستقامة مفروضة ميلها m هو مستقيم (يدعى بالفطر المرافق للاستقامة المفروضة) ميله m' ممطي بالعلاقة .

$$m m' = - \frac{b^2}{a^2}$$

وإذا كان oM و oM' نصفي قطارين مترافقين وكان احداثيا M هما $a \cos \varphi$, $b \sin \varphi$ فان احداثيا M' هما $-a \sin \varphi$, $b \cos \varphi$.

١١ - معادلة اللطح الناقص المنسوب إلى قطرين مترافقين هي :

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

حيث A و B ثنلان طولي نصفي قطارين مترافقين .

١٢ - مجموع مربعي قطرين مترافقين ثابت وسطح متوازي الأضلاع المنشأ على قطرين مترافقين ثابت .

مسائل وتمارين محلولة

٢٤٩ - اكتب معادلة قطع ناقص إذا علمت ان محرقه هما :

$$F(1, 2) , F'(2, 1)$$

وانه يمر في النقطة $A(5, 5)$

الحل :

حسب تعريف القطع الناقص :

$$A F + A F' = 2 a$$

ومنه :

$$a = 5$$

وإذا كانت $M (x , y)$ نقطة ما من القطع فعندئذ يكون :

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = 10$$

وبإصلاح هذه المعادلة نجد :

$$99 x^2 + 99 y^2 + 2 x y - 300 x - 300 y - 2000 = 0$$

وهي المعادلة المطلوبة .

٢٥٠ - برهن ان الناظم على قطع ناقص في نقطة A عليه هو
منصف داخلي للزاوية الحادة بين نصفي القطرين اللذين يصلان نقطة التماس
بالمحرقين F, F' .

الحل :

لنسب القطع الناقص إلى محوريه التناظرين فعندئذ تأخذ معادلته
الشكل :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ومعادلة مماسه في نقطة واقعة عليه $A (x_0 , y_0)$ هي :

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1$$

من المعادلة الاخيرة نستنتج ان ميل المماس في النقطة A هو $\frac{-b^2 x_0}{a^2 y_0}$ وميل الناظم هو $\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}$. وحيث ان $F(c, 0)$ و $F'(-c, 0)$

يكون ميل FA هو $\frac{y_0}{x_0 - c}$ وميل F'A هو $\frac{y_0}{x_0 + c}$.

وعلى هذا يكون ظل الزاوية الحادة بين FA والناظم هو :

$$m = \frac{\frac{y_0}{x_0 - c} - \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}}{1 + \frac{a^2 y_0^2}{b^2 x_0 (x_0 - c)}}$$

او « بالاستفادة من أن النقطة A واقعة على القطع » .

$$m = \frac{c y_0}{b^2}$$

بنفس الطريقة نجد ظل الزاوية الحادة بين الناظم في A ونصف القطر F'A .

$$m' = \frac{c y_0}{b^2}$$

وحيث ان $m = m'$ نستنتج ان الناظم هو المنصف الداخلي للزاوية FAF' وهو المطلوب .

٢٥١ - عين المحل الهندسي لمساقط محرق قطع ناقص على مماساته .

الحل :

لنفرض $A(x_0, y_0)$ نقطة واقعة على القطع فعندئذ تكون معادلة

المماس في هذه النقطة هي :

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1$$

وإذا استعملنا التمثيل الوسيطى للقطع .

$$x_0 = a \cos \varphi \quad y_0 = b \sin \varphi$$

نأخذ معادلة المماس الشكل :

$$(1) \quad \frac{x \cos \varphi}{a} + \frac{y \sin \varphi}{b} = 1$$

وتكون معادلة العمودي من النقطة $F(c, 0)$ على المماس هي :

$$(2) \quad y = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi \cdot (x - c)$$

ويكون مسقط المحرق على المماس هو نقطة تقاطع (1) مع (2) .

$$x = \frac{a(c + a \cos \varphi)}{a + c \cos \varphi} , \quad y = \frac{a b \sin \varphi}{a + c \cos \varphi}$$

وبجذف الوسيط من هاتين العلاقتين نجد المعادلة الديكارتية المحل

الهندسي المطلوب :

$$x^2 + y^2 = a^2$$

وهذه المعادلة تمثل الدائرة الأصلية للقطع .

٢٥٢ - لتكن P نقطة واقعة خارج قطع ناقص مركزه M

ومحرقاه F_1 و F_2 . ولتكن Q_1 و Q_2 نقط تقاطع الدائرة الأصلية مع

الدائرة التي قطرها $P F_1$. برهن أن $P Q_1$ و $P Q_2$ مماسان للقطع الناقص .

الحل :

من الواضح أن الزاوية $F_1 Q_1 P$ قائمة ولما كانت Q_1 واقعة على الدائرة الأصلية التي هي ، حسب المسألة السابقة ، المحل الهندسي لمساقط المحرق على مماس متحول للقطع . إذن يكون PQ_1 مماساً للقطع وكذلك PQ_2 وهو المطلوب :

٢٥٣ - برهن ان قطعة المماس لقطع ناقص ، المحصورة بين نقطة التماس ونقطة تقاطع هذا المماس مع الدليل ، ترى من المحرق الموافق ضمن زاوية قائمة .

الحل :

ان معادلة المماس للقطع :

$$x = a \cos \varphi \quad ; \quad y = b \sin \varphi$$

في نقطة M موافقة للوسيط φ هي :

$$(1) \quad \frac{x \cos \varphi}{a} + \frac{y \sin \varphi}{b} = 1$$

وان معادلة الدليل الموافق للمحرق $F(c, 0)$ هي :

$$(2) \quad x = \frac{a^2}{c}$$

إن النقطة Q نقطة تقاطع (1) و (2) هي :

$$Q \left(\frac{a^2}{c}, \frac{b}{\sin \varphi} \left(1 - \frac{a \cos \varphi}{c} \right) \right)$$

ويكون ميل FQ هو :

$$m_1 = \frac{c}{b \sin \varphi} \left(1 - \frac{a \cos \varphi}{c} \right)$$

وميل FM :

$$m_2 = \frac{b \sin \varphi}{a \cos \varphi - c}$$

ومنه $m_1 m_2 = -1$ وهو المطلوب .

٢٥٤ - ليكن القطع الناقص :

$$x = a \cos \varphi \quad y = b \sin \varphi$$

ورؤسه $B'(0, -b)$ و $B(0, b)$ و $A'(-a, 0)$, $A(a, 0)$

ان المماس في M للقطع الناقص السابق يقطع المماسين في A و A' في

P و P' والمماسين في B و B' في Q و Q' .

١ - برهن أن \overline{AP} , $\overline{A'P'}$ و $\overline{B'Q}$, \overline{BQ} ثابتان .

٢ - اكتب معادلتين الدائرتين (c) و (I) اللتين قطراهما

PP' و QQ' .

برهن أن (c) تمر بالمرقنين وان (c) و (I) متعامدتان .

٣ - اكتب معادلة المحور الأساسي لـ (c) و (I) برهن انه

الناظم في M للقطع الناقص .

٤ - أوجد احداثيات النقطتين D و D' حيث يتقاطع (c) و (I)

أوجد المحلات الهندسية لهما .

الحل :

ان معادلة الماس في M هي :

$$\frac{x \cos \varphi}{a} + \frac{y \sin \varphi}{b} = 1$$

ومعادلات المماسات في A ، A' ، B ، B' هي على الترتيب :

$$\begin{aligned} x &= a & x &= -a \\ y &= b & y &= -b \end{aligned}$$

وتكون إحداثيات النقط P ، P' ، Q ، Q' هي :

$$P (a , b \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}) , P' (-a , b \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2})$$

$$Q (\frac{a (1 - \sin \varphi)}{\cos \varphi} , b) , Q' (\frac{a (1 + \sin \varphi)}{\cos \varphi} , -b)$$

ويكون :

$$\overline{AP} = b \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} , \overline{A'P'} = b \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$$

$$\overline{BQ} = \frac{a (1 - \sin \varphi)}{\cos \varphi} , \overline{B'Q'} = \frac{a (1 + \sin \varphi)}{\cos \varphi}$$

ومن هذه العلاقات الاربع نستنتج :

$$\overline{AP} \cdot \overline{A'P'} = b^2 , \overline{BQ} \cdot \overline{B'Q'} = a^2$$

وهو المطلوب الأول :

٢ - لما كان مركز الدائرة c هو :

$$\omega_1 \left[0, \frac{1}{2} \left(b \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + b \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{b}{\sin \varphi} \right]$$

ونصف قطرها .

$$R_1^2 = (a - o)^2 + \left(b \operatorname{tg} \varphi - \frac{b}{\sin \varphi} \right)^2 = a^2 + b^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi$$

فان معادلتها هي :

$$x^2 + \left(y - \frac{b}{\sin \varphi} \right)^2 = a^2 + b^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi$$

ولما كان مركز الدائرة I' هو :

$$\omega_2 \left(\frac{a}{\cos \varphi}, 0 \right)$$

ونصف قطرها :

$$R_2^2 = a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2$$

فان معادلتها هي :

$$(2) \quad \left(x - \frac{a}{\cos \varphi} \right)^2 + y^2 = a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2$$

وإذا عوضنا احداثيات كل من المحرفين $F(c, 0)$ و $F'(-c, 0)$ في المعادلة الأولى نجد أنها محققة . وهذا يعني أن c يمر بالمحرفين .

ولما كان مربع البعد بين المركزين :

$$\frac{1}{\omega_1 \omega_2} = \frac{a^2}{\cos^2 \varphi} + \frac{b^2}{\sin^2 \varphi}$$

يساوي مجموع مربعي نصفي القطرين :

$$R_1^2 + R_2^2 = a^2 + b^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi + b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi$$

$$= \frac{a^2}{\cos^2 \varphi} + \frac{b^2}{\sin^2 \varphi}$$

فان الدائرتين (c) و (I) متعامدتان .

٣ - من الدائرتين (١) و (٢) نلاحظ أن معادلة المحور الأسامي

هي :

$$x^2 + \left(y - \frac{b}{\sin \varphi} \right)^2 - a^2 - b^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi =$$

$$\left(x - \frac{a}{\cos \varphi} \right)^2 + y^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi - b^2$$

أو :

$$(3) \quad \frac{a x}{\cos \varphi} - \frac{b y}{\sin \varphi} = c^2$$

ولما كان هذا المحور الأسامي يمر بالنقطة مع القطع :

$$x = a \cos \varphi \quad , \quad y = b \sin \varphi$$

وميله وهو ($\operatorname{tg} \varphi$) $\frac{a}{b}$) يساوي ميل الناظم في النقطة المذكورة فان

المحور الأسامي هو الناظم للقطع في هذه النقطة .

٤ - ان نقطة تقاطع (c) مع (T) هي بنفس الوقت نقط تقاطع المحور الأساسي لهما مع واحدة منها : إذن من (1) و (3) نجد النقط المشتركة :

$$D [(a + b) \cos \varphi , (b + a) \sin \varphi]$$

$$D' [(a - b) \cos \varphi , (b - a) \sin \varphi]$$

ومنها نرى أن المحل الهندسي للنقطة D هو دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $a + b$ والمحل الهندسي للنقطة D' هو عبارة عن دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $a - b$.

٢٥٥ - ليكن oM و oM' نصفي قطرين مترافقين في قطع ناقص مفروض و I منتصف MM' و T نقطة تلاقي المماسين في M و M' لهذا القطع مع بعضها .

(١) برهن ان المحل الهندسي للنقطة I هو قطع ناقص مماس لـ MM' في I .

(٢) برهن أن المحل الهندسي للنقطة T هو أيضاً قطع ناقص .

الحل :

(١) من المعلوم انه إذا كان إحداثيا M هما $a \cos \varphi , b \sin \varphi$ فإن إحداثيي M' هما $- a \sin \varphi , b \cos \varphi$ وبالتالي فإت إحداثيي I هما :

$$x = \frac{a (\cos \varphi - \sin \varphi)}{2} ; \quad y = \frac{b (\sin \varphi + \cos \varphi)}{2}$$

ومنه نجد :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \cos \varphi ; - \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \sin \varphi$$

بالترييع والجمع نجد المحل الهندسي للنقطة I :

$$2 \frac{x^2}{a^2} + 2 \frac{y^2}{b^2} = 1$$

وهو قطع ناقص نصف قطريه $\frac{a}{\sqrt{2}}$ ، $\frac{b}{\sqrt{2}}$

(٢) ان معادلة المماس للقطع في النقطة M هي :

$$(1) \quad \frac{x \cos \varphi}{a} + y \frac{\sin \varphi}{b} = 1$$

ومعادلة المماس في النقطة M' هي :

$$(2) \quad - \frac{x \sin \varphi}{a} + \frac{y \cos \varphi}{b} = 1$$

بحل (1) و (2) نجد أن احداثي T هما :

$$x = a (\cos \varphi - \sin \varphi) ; y = b (\cos \varphi + \sin \varphi)$$

وبجذف الوسيط φ بين هاتين المعادلتين نجد :

$$\frac{x^2}{2 a^2} + \frac{y^2}{2 b^2} = 1$$

وهو قطع ناقص نصف قطريه $\frac{a}{\sqrt{2}}$ و $\frac{b}{\sqrt{2}}$

٢٥٦- برهن انه إذا اتخذنا مركز القطع الناقص قطباً ومحوره الكبير

الكبير محوراً قطبياً فان معادلته القطبية تكون :

$$r^2 (1 - e^2 \cos^2 \varphi) = b^2$$

الحل :

نعلم أن معادلة القطع الديكارتية ، إذا نسبناه إلى محوريه
التناظرين ، هي :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

واستناداً إلى نص المسألة يمكننا أن نكتب :

$$x = r \cos \theta , \quad y = r \sin \theta$$

بالتعويض في معادلة القطع نجد :

$$r^2 (b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta) = a^2 b^2$$

أو :

$$r^2 (1 - e^2 \cos^2 \theta) = b^2$$

وهو المطلوب :

٢٥٧ - إذا اخترنا محرق القطع قطعاً ومحوره الكبير محوراً قطعياً

فبين ان معادلة المماس في النقطة التي زاويتها القطبية α هي :

$$\frac{p}{r} = \cos (\theta - \alpha) - e \cos \theta$$

استنتج من ذلك ان قطعتي المماسين المنشأتين من نقطة خارج القطع

تريان من محرق القطع ضمن زاويتين متساويتين

الحل :

نعلم ان معادلة القطع القطبية هي :

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \vartheta}$$

وبالانتقال الى الاحداثيات الديكارتية متخذين المحرق نقطة اصل والمحور الكبير محوراً للسينات نجد :

$$(1) \quad x^2 + y^2 = (p + e x)^2$$

ان معادلتى المماس الوسيطيتين في النقطة (x_1, y_1) على القطع هما :

$$x = x_1 + \alpha \rho ; \quad y = y_1 + \beta \rho$$

فاذا عوضنا في المعادلة (١) حصلنا على معادلة من الدرجة الثانية في ρ ، ولو كتبنا بعد ذلك شرط التماس ، وهو ان يكون مميز هذه المعادلة صفراً ، لوجدنا :

$$\beta y_1 + \alpha x_1 = \alpha e p + \alpha e^2 x_1$$

ولو رمزنا لميل المماس بـ $m = \frac{\beta}{\alpha}$ لوجدنا من المعادلة الاخيرة :

$$m = \frac{e p + (e^2 - 1) x_1}{y_1}$$

وتكون معادلة المماس :

$$y - y_1 = \frac{e p + (e^2 - 1) x_1}{y_1} (x - x_1)$$

فاذا عوضنا في هذه المعادلة :

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$x_1 = r_1 \cos \alpha$$

$$y_1 = r_1 \sin \alpha$$

$$\text{ولاحظنا أن } r_1 = \frac{P}{1 - e \cos \alpha} \text{ فالتنا نجد :}$$

$$\frac{P}{r} = \cos (\theta - \alpha) - e \cos \theta$$

وهذا برهان الجزء الاول من المسألة .

كي نبرهن على الجزء الثاني من المسألة نفرض ان الزاويتين القطبيتين
لنقطتي تماس المماسين المنشأين من نقطة ما P خارج القطع هما α و β
فعندئذ تكون معادلتا المماسين .

$$\frac{P}{r} = \cos (\theta - \alpha) - e \cos \theta$$

$$\frac{P}{r} = \cos (\theta - \beta) - e \cos \theta$$

من هاتين المعادلتين نجد :

$$\cos (\theta - \alpha) = \cos (\theta - \beta)$$

وهي تعين لنا الزاوية القطبية للنقطة P .

من المعادلة الأخيرة نرى انه اما أن يكون :

$$\theta - \alpha = \theta - \beta$$

$$\alpha = \beta$$

أي

وهذا أمر غير ممكن إذا كانت النقطة P خارج القطع .

واما أن يكون :

$$\theta - \alpha = \beta - \theta$$

وهذا يعني ان الزاويتين اللتين نرى منها قطعتي المماس متساويتان .

٢٥٨ - $A(0, 0)$ و $B(1, -1)$ و $C(2, 1)$ ثلاث نقط

واقعة على قطع ناقص احد محاوره ينطبق على المستقيم $x + y + 1 = 0$
أوجد معادلة القطع :

الحل :

ان نظير كل من النقط A و B و C بالنسبة لمحور القطع تقع على القطع كذلك . لنبحث أولاً عن A' نظير A بالنسبة لمحور القطع المنطبق على المستقيم المفروض . لنفرض $A'(x', y')$ ولتكن A'' منتصف $A'A'$. بسهولة نلاحظ أن $A''(\frac{x'}{2}, \frac{y'}{2})$. إن هذه النقطة تقع على المستقيم المفروض إذن :

$$(4) \quad x' + y' + 2 = 0$$

كما أن $A'A''$ عمودي على المستقيم المفروض ، إذن :

$$(2) \quad \frac{x'}{1} = \frac{y'}{1}$$

بحل المعادلتين (1) و (2) نجد $A'(-1, -1)$.

بالطريقة نفسها نجد أن B' نظير B بالنسبة للمحور Y :

$$B' (0, -2)$$

بهذه الطريقة تكون قد توصلنا إلى معرفة خمس نقاط واقعة على القطع وهذه تكفي لمعرفة معادلته ويتم ذلك بتعويض إحداثيات النقاط الخمس في المعادلة :

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & x_1 y & x & y & 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & x_1 y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & x_2 y_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3^2 & x_3 y_3 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & y_4^2 & x_4 y_4 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & y_5^2 & x_5 y_5 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

حيث (x_5, y_5) ، (x_4, y_4) ، (x_3, y_3) ، (x_2, y_2) ، (x_1, y_1) هي النقاط الخمس المفروضة .

فإذا عوضنا ونشرنا المعين الحاصل وجدنا المعادلة المطلوبة :

$$4x^2 - 7xy + 4y^2 - 7x + 8y = 0$$

٢٥٩ - يبرهن أنه إذا كان لدينا المنحنى :

$$A(ax + by + c)^2 + B(\alpha x + \beta y + \gamma)^2 + c = 0$$

فان المستقيمين :

$$(1) \quad ax + by + c = 0$$

$$(2) \quad \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

يمثلان خطين متوازيين فيه وذلك ضمن الشرط $\beta a \neq \alpha b$.

الحل :

لنفرض محورين جديدين احدهما OX ينطبق على المستقيم (1) والآخر OY ينطبق على المستقيم (2) فعندئذ تأخذ معادلة المنحني الشكل :

$$A' X^2 + B' Y^2 + c' = 0$$

وهي معادلة قطع منسوب إلى خطين مترافقين فيه وهذا يؤدي إلى أن المستقيمين :

$$X = 0 \text{ و } Y = 0 \text{ أي (1) و (2) هما خطان مترافقان .}$$

يلاحظ أنه لا يمكن اختيار (1) و (2) كمحورين إحداثيين جديدين إلا إذا كانا متقاطعين ومنه الشرط $\beta a \neq \alpha b$.

٢٦٠ - أوجد معادلة قطع ناقص يمر بالنقط $D (0 , 1)$ و $E (1 , 0)$ ويقبل المستقيمين .

$$x - 2y - 1 = 0 \quad , \quad 2x - y + 1 = 0$$

كخطين مترافقين فيه :

الحل :

استناداً إلى المسألة السابقة يمكن كتابة معادلة القطع على الشكل :

$$(1) \quad A (x - 2y - 1)^2 + B (2x - y + 1)^2 + C = 0$$

ولما كانت D و E واقعين على القطع اذن :

$$9B + C = 9A + C = 0$$

فاذا عوضنا كلا من B و A بدلالة C في المعادلة (1) ثم اختصرنا على C وجدنا المعادلة المطلوبة :

$$(x - 2y - 1)^2 + (2x - y + 1)^2 = 9$$

مسائل وغارين غير محلولة

٢٦١ - محيط مثلث يساوي 30 وحدة طول واحدات رأسين منه هي (0, -5) و (0, 5) فما هو المحل الهندسي للرأس الثالث .

٢٦٢ - قطعة AB طولها 12 سم تتحرك في لمستوي oxy بحيث ترمم A المحور ox وترمم B المحور oy . ما هو المحل الهندسي للنقطة C التي تبعد عن A بمقدار 4 سم .

٢٦٣ - عين المماسات للقطع الناقص :

$$x^2 - xy - y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$$

والموازية للمستقيم $2x + 2y - 1 = 0$

٢٦٤ - عين المماسات للقطع الناقص :

$$x^2 + xy + y^2 = 3$$

والموازية للمحاور الاحداثية :

٢٦٥ - عين المماسات للقطع :

$$3x^2 + 4xy + 5y^2 - 7x - 8y - 3 = 0$$

والمرة بالنقطة (2, 1) .

٢٦٦ - عين المماسات للقطع :

$$x^2 - xy - y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$$

والمارة بالنقطة (4 , - 2)

٢٦٧ - برهن أنه إذا كان PFQ وترأ محرقياً في قطع ناقص بضع زاوية θ مع محور القطع فان :

$$\frac{1}{FP} + \frac{1}{FQ} = \frac{2}{p}$$

$$\frac{1}{FQ} - \frac{1}{FP} = \frac{2e \cos \theta}{h}$$

$$PQ = \frac{2p}{1 - e^2 \cos^2 \theta}$$

٢٦٨ - أوجد المحل الهندسي لمركز الدائرة الماسة للدائرتين :

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 27 = 0$$

٢٦٩ - برهن ان حاصل ضرب بعدي المحرقين عن مماس متحول للقطع الناقص ثابت .

٢٧٠ - قطع ناقص محرقه في النقطة (3 , 0) ومعادلة الدليل الموافق $x - 1 = 0$ وتباعده المركزي $\frac{1}{2}$. أوجد معادلة هذا القطع وطول محوره الكبير .

٢٧١ - المماس في M لقطع ناقص يقطع المماسين في النروتين A و A'

من المحور الكبير في D و E . نصل هاتين النقطتين بالخرقين فنحصل على أربعة مستقيمتين تتقاطع في النقطتين G₁ و H .

١ - برهن ان H و G₁ تقعان على الناطم في M للقطع

٢ - أوجد المثلين الهندسيين لـ H و G₁ عندما تتحول M على القطع الناقص .

٢٧٢ - ترمم النقطة M (a cos φ , b sin φ) القطع الناقص :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ومس الدائرة T' القطع في النقطة M مارة بمركزه . أوجد المحلات الهندسية الآتية ، وذلك عندما يتحول M على القطع الناقص المذكورة .

- ١ - المحل الهندسي لمركز الدائرة ω .
 - ٢ - المحل الهندسي لنقطة تقاطع المستقيم ω M مع الدائرة T' .
 - ٣ - المحل الهندسي لمنتصف الوتر المشترك بين القطع والدائرة .
 - ٤ - المحل الهندسي لمسقط مركز القطع على الوتر المشترك .
- ٢٧٣ - المستقيمان :

$$x + y - 1 = 0$$

$$x - y + 1 = 0$$

هما نصف قطرین متوازيين في قطع . أوجد معادلة هذا القطع إذا علمت ان محوره الكبير 4 ومحوره الصغير 2 .

٢٧٤ - برهن انه اذا قطع مماس في P لقطع ناقص بماسين متوازيين في النقطتين T , T' .

$$TP \cdot PT' = \overline{OD}^2 \quad \text{فان :}$$

$$FT \cdot FT' : F'T \cdot F'T' = FP : F'P \quad \text{و}$$

حيث F و F' محرفا للقطع و OD نصف القطر المرافق ل OP

٢٧٥ - برهن انه إذا كان F محرق قطع ويقطع الناظم في P

المحور الكبير في G والصغير في g و OD نصف قطر مرافق ل OP فان :

$$FG : OF = FP : AO$$

$$FG : OF = OD : BO$$

حيث A احدى نهايتي المحور الكبير و B احدى نهايتي المحور الصغير .

٢٧٦ - نقطة من قطع ناقص و oQ هو نصف قطر موازي للمماس

في P (o مركز القطع) برهن أن $\overline{FP} \cdot \overline{F_1P} = \overline{OQ}^2$.

المُجَوِّبَةُ

$$\frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{100} = 1 \quad - ٢٦١$$

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad - ٢٦٢$$

$$x + y = 2 \quad , \quad 5x + 5y = 6 \quad - ٢٦٣$$

$$x = \pm 2 \quad , \quad y = \pm 2 \quad - ٢٦٤$$

$$9x + 10 = 28 \quad - ٢٦٥$$

$$x + y = 2 \quad , \quad 7x + 10y = 8 \quad - ٢٦٦$$

$$220 x^2 + 256 y^2 - 660 x = 3025 \quad - \text{ २१A}$$

$$28 x^2 + 64 y^2 - 84 x = 49$$

$$3 x^2 + 4 y^2 - 22 x + 5 = 0 ; 2 \frac{2}{3} \quad - \text{ २१.}$$

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{(a \pm c)^2}{b^2 c^2} y^2 = 1 \quad - \text{ २१\}$$

$$y = \frac{(b^2 - c^2 \cos^2 \varphi) \sin \varphi}{2 b} \quad - \text{ २१२}$$

$$x = \frac{(a^2 + c^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi}{2 a}$$

$$x = \frac{c^2}{a} \sin^2 \varphi \cos \varphi, y = - \frac{c^2}{b} \cos^2 \varphi \sin \varphi \quad (\text{२})$$

$$x = \frac{a}{c^2} (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) \cos \varphi$$

$$y = - \frac{b}{c^2} (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) \sin \varphi \quad (\text{३})$$

$$x = \frac{a b^2}{c^2} \cos \varphi, \quad y = - \frac{a^2 b}{c^2} \sin \varphi \quad (\text{४})$$

$$(x - y + 1)^2 + 4(x + y - 1)^2 = 8 \quad - \text{ २१३}$$

الفصل الثامن

القطع الزائد

- ١ - القطع الزائد هو المحل الهندسي للنقط التي فضل بمديها عن نقطتين ثابتتين ، تسميان بالمرقنين ، يساوي طولاً ثابتاً $2a$.
- ٢ - إذا اسبنا القطع إلى جلة محاور منطبقة على محوريه التناظرين كانت معادلته :

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a و b تمثلان طولي نصفي قطري القطع .

نقول عن قطع زائد انه متساوي الساقين إذا كان $a = b$.

- ٣ - من التعريف الاول للقطع يمكننا ان نستنتج تعريفاً آخر : القطع الزائد هو المحل الهندسي للنقط التي نسبة بعدها عن نقطة ثابتة (هي المرق) إلى بعدها عن مستقيم ثابت ، يدعى الدليل ، تساوي عدداً ثابتاً e أكبر من الواحد يدعى بالتباعد المركزي وهو يساوي نسبة بعد المرق عن مركز القطع إلى نصف القطر الحقيقي للقطع ، أي : $\frac{c}{a}$ حيث $(c^2 = a^2 + b^2)$.

٤ - المعادلة القطبية للقطع الزائد ، إذا اتخذنا أحد محوريه قطباً والمحور الحقيقي محوراً قطبياً ، هي :

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$$

حيث e تمثل التباعد المركزي و p وسيط القطع .

٥ - للقطع الزائد خطان مقاربان يميلان على محور القطع زاوية ظلها

$$\pm \frac{b}{a}$$

٦ - معادلة القطع الزائد المنسوب لمستقيجه المقارين :

$$X Y = \pm \frac{c^2}{4}$$

(يؤخذ بالاشارة + عندما يقع القطع في الجزأين الأول والثالث ويؤخذ بالاشارة - في الحالة الثانية) .

إن سطح التلك المحصور بين الخطين المقارين وأحد مماسات القطع ثابت ويساوي جداء نصفى محوري القطع .

٧ - يمكن تمثيل القطع الزائد وسيطياً بأشكال مختلفة أكثرها استعمالاً .

$$(2) \quad x = \mp a \operatorname{ch} \varphi \quad , \quad y = b \operatorname{sh} \varphi$$

$$x = \frac{a}{\cos t} \quad , \quad y = b \operatorname{tg} t \quad : \text{ ومنها }$$

$$x = a \frac{1 + u^2}{1 - u^2} \quad , \quad y = \frac{2 b u}{1 - u^2} \quad : \text{ و }$$

٨ - كل مستقيم في مستوي القطع الزائد يقطعه على الأكثر بنقطتين .

٩ - معادلة المماس الذي ميله m للقطع (١) هي :

$$y = m x \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$$

ومعادلة المماس للقطع (١) من نقطة $M (x_0, y_0)$ واقعة عليه هي :

$$\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1$$

وإذا كانت M توافق قيمة الوسط φ (وفق التمثيل الوسيطى (2))
فمعدنذ تكون معادلة المماس :

$$\mp \frac{x \operatorname{ch} \varphi}{a} - \frac{y \operatorname{sh} \varphi}{b} = 1$$

وميل المماسات المرسومة من نقطة ثابتة (x_0, y_0) إلى القطع (1) تتعين
بالمعادلة :

$$(x_0^2 - a^2)m^2 - 2x_0y_0m + y_0^2 + b^2 = 0$$

والحل الهندسى للنقط التى يرى منها القطع ضمن زاوية قائمة هو دائرة مركزها مركز
القطع ومربع قطرها يساوي فضل مربعي نصفى قطري القطع .

$$(3) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

بالقطع المرافق للقطع (1)

١١ - الحل الهندسى لمتصفات الاوتار الموازية لاستقامة مفروضة ميلها m هو
مستقيم (يدعى بالقطر المرافق للاستقامة المفروضة) يعطى ميله m' بالعلاقة :

$$m m' = \frac{b^2}{a^2}$$

وإذا كان oA و oB نصفى قطرين مترافقين (o مركز القطع) وإذا كانت

النقطة A على القطع (1) ، واحداثياتها $x = a \operatorname{ch} t$ ، $y = b \operatorname{sh} t$ ، فان

النقطة B تقع على القطع (3) واحداثياتها : $x = a \operatorname{sh} t$; $y = b \operatorname{ch} t$.

١٣ - معادلة القطع الزائد المنسوب إلى قطرين مترافقين هي :

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$$

حيث A و B تمثلان طولي نصفي قطرين مترافقين .

١٤ - فضل مربعي قطرين مترافقين ثابت و سطح متوازي الأضلاع المنشأ على قطرين مترافقين ثابت أيضاً .

١٥ - إذا قطعنا قطعاً زائداً بمستقيم ما فان القطعتين المحصورتين بين القطع وخطيه المقاربين متساويتان . كما ان القطعتين المحصورتين بين القطع المرافق والخطين المقاربين كذلك متساويتان .

ان نقطة التماس تقسم قطعة المماس المحصورة بين خطين مقاربين إلى قطعتين متساويتين .

مسائل وتمارين محلولة

٢٧٧ - أوجد معادلة قطع زائد متساوي الساقين إذا علمت أن احد محرقيه هو $F(1, 1)$ وان دليله هو المستقيم :

$$x + y - 1 = 0$$

الحل :

لنحسب أولاً التباعد المركزي . بما أن $a = b$ فانه يكون :

$$c^2 = a^2 + a^2 = 2 a^2$$

ومنه :

$$c = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$$

وإذا كانت (x, y) نقطة ما من القطع فان بعدها عن الدليل هو :

$$\frac{|x + y - 1|}{\sqrt{2}}$$

وبعد هذا عن المحرق هو $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$. واستناداً إلى التعريف الثاني للقطع يكون :

$$(x-1) + (y-1)^2 = (x+y-1)^2$$

ومنه :

$$2xy = 1$$

٢٧٨ - ما هي معادلة قطع زائد أحد محرقيه هو $(0, 2)$ ويقبل

المستقيمين :

$$x + y - 1 = 0$$

$$x - y + 1 = 0$$

كخطين مقاربين له :

الحل :

إن مركز القطع يقع في نقطة تقاطع خطيه المقاربين أي في النقطة $(0, 1)$ والمحرق الآخر يقع في النقطة $(0, 0)$ نظير المحرق الأول بالنسبة للمركز وأما بعد المحرق عن المركز فهو $c = 1$.

وبما أن محاور القطع هي منصفات الزوايا الحادثة بين الخطين المقاربين فهي إذن :

$$\frac{x + y - 1}{\sqrt{2}} = \mp \frac{x - y + 1}{\sqrt{2}}$$

ومنه :

$$y = 1 \quad , \quad x = 0$$

ولكن محور القطع هو المستقيم $x = 0$ لأن المحرق يقع عليه .
وبما ان الحطين المقارين ميلان على محور القطع بزاوية مقداره

$$\frac{\pi}{4} \text{ إذن : } \frac{b}{a} = 1 .$$

$$\text{ولما كان } c^2 = a^2 + b^2 = 1 \text{ إذن } a = b = \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

وبذلك تكون معادلة القطع :

$$2 (y - 1)^2 - 2x^2 = 1$$

أو :

$$2x^2 - 2y^2 + 4y - 1 = 0$$

٢٧٩ - A نقطة كائنة على المحور ox فصلها a . عين المحل الهندسي

للنقطة M من المستوي xoy بحيث يكون :

$$(1) \quad \widehat{MAo} = 2 \widehat{MoA}$$

الحل :

لنفرض (x, y) إحداثيي M فعندئذ يكون $\widehat{MAo} = \frac{y}{a-x}$

و $\widehat{MoA} = \frac{y}{x}$. لנأخذ ظل الطرفين في (1) فنجد :

$$\frac{y}{a-x} = \frac{2xy}{x^2-y^2}$$

ومنـه :

$$y (3x^2 - y^2 - 2ax) = 0$$

فأما $y = 0$ وهذا حل واضح ، أو :

$$3x^2 - y^2 - 2ax = 0$$

وهذه تكتب بالشكل :

$$3 \left(x - \frac{a}{3} \right)^2 - y^2 = \frac{a^2}{3}$$

وهي معادلة قطع زائد مركزه $\left(\frac{a}{3}, 0 \right)$.

٢٨٠ - لدينا قطع زائد متساوي الساقين معين بالمعادلة :

$$xy = m^2$$

ووتران متعامدان AB و CD من هذا القطع . برهن أن كلا من النقط A و B و C و D هي نقط تلاقي ارتفاعات المثلث الذي رؤوسه النقط الأخرى .

الحل :

لنفرض أن $A (x_1, y_1)$ و $B (x_2, y_2)$ و $C (x_3, y_3)$ و $D (x_4, y_4)$ فعندئذ يكون (باعتبار أن هذه النقط واقعة على القطع) :

$$(1) \quad x_1 y_1 = x_2 y_2 = x_3 y_3 = x_4 y_4 = m^2$$

وبما أن AB و CD متعامدان فإن :

$$(x_2 - x_1)(x_4 - x_3) + (y_2 - y_1)(y_4 - y_3) = 0$$

أو (بالاستفادة من (1) بتعويض y_1 بما يساويها بدلالة x_1) :

$$(2) \quad x_1 x_2 x_3 x_4 + m^4 = 0$$

لنبرهن أن A هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث BCD . من الواضح أن A تقع على الارتفاع المتعلق بـ B وذلك لأن AB عمودي على CD حسب الفرض . يكفي أن نبرهن أن CA عمودي على BD أي أن :

$$(x_3 - x_1)(x_4 - x_2) + (y_3 - y_1)(y_4 - y_2) = 0$$

أو (بالاستفادة من (1)) .

$$x_1 x_2 x_3 x_4 + m^4 = 0$$

وهذا بالفعل يحقق حسب (2) وهو المطلوب .

يمكن بشكل مماثل برهان أن B هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ADC وهكذا .

٢٨١ - نرسم من نقطة M من قطع زائد منسوب لمحوريه التناظرين ، موازياً لأحد مستقيمي المقارين فيلاقي المحور في النقطة P . ثم نرسم من M مماساً MT للدائرة الأصلية لهذا القطع . برهن أن $MP = MT$.

الحل :

بما أن نصف قطر الدائرة الأصلية a ومركزها نقطة الأصل فإن :

$$(1) \quad \overline{MT}^2 = x_o^2 + y_o^2 - a^2$$

بفرض أن إحداثيي M هما x_o و y_o .

ومعادلة المستقيم الموازي لأحد المستقيمين المقارنين من النقطة M

هي :

$$y - y_0 = \mp \frac{b}{a} (x - x_0)$$

وبلاقي هذا المستقيم محور القطع في النقطة :

$$P \left(x_0 \pm \frac{a y_0}{b}, 0 \right)$$

وعلى هذا فإن :

$$(2) \quad \overline{MP^2} = \frac{a^2 y_0^2}{b^2} + y_0^2$$

واستناداً إلى كون النقطة M واقعة على القطع فإن :

$$b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2 = a^2 b^2$$

بالتعويض في (2) نجد أن :

$$(3) \quad \overline{MP^2} = x_0^2 + y_0^2 - a^2$$

بمقارنة (1) مع (3) نجد أن $MP = MT$ وهو المطلوب .

٢٨٢ - اكتب معادلة القطع الزائد الذي يقع مركزه في النقطة

(1, 1) وأحد محراقيه في النقطة (3, 3) ويقبل المستقيم :

$$x + 2y - 7 = 0$$

بمأساً له .

الحل :

بسهولة نلاحظ أن :

$$c^2 = 4 + 4 = 8$$

$$c = 2\sqrt{2} \quad \text{أي}$$

ومن جهة ثانية نعلم أن معادلة المماس للقطع (إذا كان منسوباً لمحوريه التناظرين) هي :

$$y = m x \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$$

فاذا دعونا فاصلة نقطة تقاطع المماس مع محور السينات h فعندئذ يكون :

$$(1) \quad m^2 h^2 = a^2 m^2 - b^2$$

وهذه علاقة تربط بين ميل المماس عن محور القطع وبعد نقطة تقاطع المماس مع المحور الحقيقي للقطع عن مركز القطع . ولكن حيث ان معادلة محور القطع « المار بالنقطتين (1 و 1) ، (3 و 3) » هي :

$$y = x$$

فنقطة تقاطع المماس مع المحور هي $x = y = \frac{7}{3}$ وبعد نقطة التقاطع عن المركز هو :

$$h^2 = \frac{32}{9}$$

واما ميل المماس عن محور السينات فهو $-\frac{1}{2}$ ولما كان ميل محور القطع يساوي واحداً فان ميل المماس عن محور القطع :

$$m = \frac{-\frac{1}{2} - 1}{1 - \frac{1}{2}} = -3$$

وعلى هذا نجد اذا عوضنا في العلاقة (1) أن :

$$\frac{32}{9} = \frac{9a^2 - b^2}{9}$$

$$a = 2 \quad c = 2\sqrt{2} \quad \text{إذن}$$

وحسب تعريف القطع تكون المعادلة المطلوبة :

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2} - \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = \pm 4$$

$$xy - x - y - 1 = 0 \quad \text{وبالاصلاح نجد}$$

$$- 283 \quad \text{ليكن لدينا القطع الزائد المعين بالمعادلة الديكارتية}$$

$$. xy = 6$$

أو بالمعادلتين الوسيطيتين :

$$x = 2t \quad y = \frac{3}{t}$$

١ - أوجد معادلة المماس والناظم في نقطة ما M من القطع ثم برهن أن هذا الناظم يقطع المنحني مرة أخرى . عين هذه النقطة .

٢ - عين نقطة تقاطع ناظمين للقطع في نقطتين موافقتين لقيمتين للوسيط t_1 و t_2 ثم عين الموضع الذي تنتهي إليه هذه النقطة عندما نجعل $t_2 \rightarrow t_1$ «مركز تقوس القطع» .

٣ - برهن انه يمكن رسم أربعة نواظم للقطع من نقطة (X, Y) وإذا لاقى هذه النواظم القطع في النقط (x_3, y_3) ، (x_4, y_4) ، (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) فبرهن أن :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = X$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = Y$$

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = y_1 y_2 y_3 y_4 = -36$$

الحل :

من اجل ايجاد معادلة المماس في نقطة (x_0, y_0) على القطع ، نفرض ان هذه المعادلة من الشكل :

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha \rho \\ y = y_0 + \beta \rho \end{cases}$$

وبالتعويض في المعادلة الديكارتية نجد :

$$\alpha \beta \rho^2 + (\alpha y_0 + \beta x_0) \rho = 0$$

كي يكون لهذه المعادلة جذر مضاعف يجب أن يكون :

$$\alpha y_0 + \beta x_0 = 0$$

$$m = - \frac{y_0}{x_0} \quad \text{ومنه}$$

وبذلك تكون معادلة المماس المطلوبة :

$$y - y_0 = - \frac{y_0}{x_0} (x - x_0)$$

$$x_0 y + y_0 x = 2 x_0 y_0 \quad \text{أو :}$$

وحيث أن احداثيات نقطة ما على المنحني $x_0 = 2t$ ، $y_0 = \frac{3}{t}$ تصبح

معادلة المماس :

$$2t y + \frac{3}{t} x = 12$$

وتكون معادلة الناظم :

$$(1) \quad y - \frac{3}{t} = - \frac{2t^2}{3} (x - 2t)$$

لايجاد تقاطع هذا الناظم مع القطع $x y = 6$ نبدل فنجد :

$$2 t^3 x^2 + (9 - 4 t^4) x - 18 t = 0$$

وهذه المعادلة من الدرجة الثانية في x تعطينا :

$$x_1 = 2 t \quad , \quad x_2 = -\frac{9}{2 t^3}$$

$$y_1 = \frac{3}{t} \quad , \quad y_2 = -\frac{4 t^3}{3} \quad : \text{ويكون}$$

فالنقطة المطلوبة هي : $(-\frac{9}{2 t^3} , -\frac{4 t^3}{3})$

٢ - الناظران الموافقان للقيمتين t_1 و t_2 هما :

$$y - \frac{3}{t_1} = \frac{2 t_1^2}{3} (x - 2 t_1)$$

$$y - \frac{3}{t_2} = \frac{2 t_2^2}{3} (x - 2 t_2)$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد نقطة التقاطع وهي :

$$x = \frac{9 + 4 t_1 t_2 (t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2)}{2 t_1 t_2 (t_1 + t_2)}$$

$$y = \frac{9 (t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2) + 4 t_1^3 t_2^3}{3 t_1 t_2 (t_1 + t_2)}$$

فاذا جعلنا $t_2 \rightarrow t_1$ وجدنا احداثيات مركز التقوس :

$$x = \frac{9 + 12 t_1^4}{4 t_1^3} , \quad y = \frac{27 + 4 t_1^4}{9 t_1}$$

٣ - لنبحث عن قيم الوسيط t التي من أجلها ير الناظم (1) بـ (X, Y) . إن قيم t هذه تحقق العلاقة :

$$Y - \frac{3}{t} = \frac{2 t^2}{3} (X - 2 t)$$

أو :

$$(2) \quad t^4 - \frac{1}{2} X t^3 + \frac{3}{4} t Y - \frac{9}{4} = 0$$

فاذا كانت t_1 و t_2 و t_3 و t_4 جذور هذه المعادلة فإنه يمكن كتابتها بالشكل :

$$(t - t_1) (t - t_2) (t - t_3) (t - t_4) = 0$$

وبقارنة الأمثال نجد :

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{1}{2} X$$

$$t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_1 t_4 + t_2 t_3 + t_2 t_4 + t_3 t_4 = 0$$

$$t_1 t_2 t_3 + t_2 t_3 t_4 + t_3 t_4 t_1 + t_4 t_1 t_2 = - \frac{3}{4} Y$$

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = - \frac{9}{4}$$

واستناداً إلى ان : $x = 2 t$ و $y = \frac{3}{t}$ نجد :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 (t_1 + t_2 + t_3 + t_4) = X$$

وهي العلاقة الأولى :

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 3 \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_4} \right)$$

$$= \frac{3 (t_2 t_3 t_4 + t_3 t_4 t_1 + t_4 t_1 t_2 + t_1 t_2 t_3)}{t_1 t_2 t_3 t_4} = Y$$

وهي العلاقة الثانية :

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = 16 t_1 t_2 t_3 t_4 = - 36$$

$$y_1 y_2 y_3 y_4 = \frac{8}{t_1 t_2 t_3 t_4} = - 36$$

وهو المطلوب .

٢٨٤ - ليكن القطع الزائد (C) الذي ترسمه النقطة M

$$x = \frac{a}{\cos u} \quad , \quad y = b \operatorname{tg} u$$

والقطع (C') الذي ترسمه النقطة M' .

$$x = a \operatorname{tg} u \quad , \quad y = \frac{b}{\cos u}$$

١ - اكتب معادلة المماس MT' في M للقطع (c) ومعادلة المماس

M' T' في M' للقطع (c') . برهن ان MT يوازي OM' وان M' T'

يوازي OM . ان MT يقطع ox و oy في P و Q و M' T' يقطع

نفس المحورين في P' و Q' ، برهن أن P Q و P' Q' يوازيان استقامة ثابتة .

برهن ان OM' هو القطر المرافق ل OM .

٢ - احسب $\overline{OM}^2 - \overline{OM'}^2$. احسب سطح المثلث OMM' .

٣ - أوجد المحل الهندسي للنقطة H منتصف MM' وللنقطة G

نقطة تقاطع MT و MT' وذلك عندما يتحول الوسيط u .
 ؛ - ليكن d و d' بعدي o عن MT و MT' ، احسب :

$$\frac{1}{d^2} - \frac{1}{d'^2}$$

الحل :

لما كانت المعادلة الديكارتية للقطع الزائد (c) هي من الشكل :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

فان معادلة المماس في نقطة واقعة عليه $M(x_0, y_0)$ هي :
 أي :

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

$$(1) \quad b x - a y \sin u = ab \cos u$$

ولما كانت المعادلة الديكارتية للقطع الزائد (c') هي من الشكل

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

فان معادلة المماس في نقطة واقعة عليه $M'(x_0, y_0)$ هي :

$$\frac{y_0 y}{b^2} - \frac{x_0 x}{a^2} = 1$$

أي :

$$(2) \quad a y - b x \sin u = ab \cos u$$

ان ميل OM' هو :

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{\cos u} \cdot \frac{1}{\operatorname{atg} u} = \frac{b}{a \sin u}$$

في حين نلاحظ من المعادلة (1) أن ميل المماس MT هو كذلك $\frac{b}{a \sin u}$ ومنه نستنتج أن MT يوازي OM' . بنفس الطريقة نلاحظ أن M'T' يوازي OM .

من المعادلة (1) نحصل على إحداثيات النقط P و Q بتعويض y بصفر تارة و x بصفر تارة أخرى :

$$P (a \cos u , 0) \quad , \quad Q (0 , - b \operatorname{ctg} u)$$

ومن المعادلة (2) :

$$P' (- a \operatorname{ctg} u , 0) \quad , \quad Q' (0 , b \cos u)$$

ومنه نجد ميل P Q' هو $\frac{-b}{a}$ وكذلك ميل P' Q هو $\frac{-b}{a}$ وهذا يعني أن كلا من P Q' و P' Q يوازي الاستقامة الثابتة التي ميلها $\frac{-b}{a}$.

يلاحظ ان جداء ميلي OM و OM' هو :

$$\frac{b}{a \sin u} \cdot \frac{b \sin u}{a} = \frac{b^2}{a^2}$$

وهذا يعني أن OM' هو القطر المرافق لـ OM .

٢ - لما كان OM و OM' نصفي قطرين متوازيين فاستناداً إلى نظريات ابولونيوس يكون لدينا :

$$\overline{OM}^2 - \overline{OM'}^2 = a^2 - b^2$$

$$\frac{1}{2} ab = OMM' \text{ سطح المثلث}$$

٣ - نلاحظ أن :

$$H \left[\frac{a (1 + \sin u)}{2 \cos u}, \frac{b (1 + \sin u)}{2 \cos u} \right]$$

ومنه نجد :

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$$

فالحل الهندسي لـ H هو أحد الخطين المقارين للقطعين .

للحصول على نقطة تقاطع MT و M'T' نحل المعادلتين (1)

و (2) فنجد :

$$G \left[\frac{a (1 + \sin u)}{\cos u}, \frac{b (1 + \sin u)}{\cos u} \right]$$

ومنه نجد :

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$$

وهذا يعني أن الحل الهندسي لـ G هو نفس الحل الهندسي لـ H

٤ - بسهولة نلاحظ أن بعد O عن MT وبعد O عن MT' هما :

$$d = \frac{|ab \cos u|}{\sqrt{b^2 + a^2 \sin^2 u}}, \quad d' = \frac{|ab \cos u|}{\sqrt{a^2 + b^2 \sin^2 u}}$$

ومنه :

$$\frac{1}{d^2} - \frac{1}{d'^2} = \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2}$$

وهو المطلوب .

٢٨٥ - لدينا قطع زائد تباعده المركزي $e = 2$. برهن أن أبة دائرة تمر بأحد رأسي القطع وبالخرق الموافق للرأس الآخر تلاقي القطع في ثلاث نقط هي رؤوس مثلث متساوي الأضلاع .

الحل :

نلاحظ بسهولة أن $c = 2a$ و $b^2 = 3a^2$ وأن معادلة القطع إذا نسب إلى محوريه التناظرين هي :

$$(1) \quad 3x^2 - y^2 - 3a^2 = 0$$

وإذا فرضنا أن الدائرة تمر بالرأس $(-a, 0)$ وبالخرق $(c, 0)$ فعندئذ يقع مركزها في النقطة $(\frac{a}{2}, \lambda)$ وتكون معادلتها :

$$(2) \quad x^2 + y^2 - ax - 2\lambda y - 2a^2 = 0$$

ومن المعلوم أن الشرط اللازم والكافي كي يكون مثلث $M_1M_2M_3$ متساوي اضلاع هو أن ينطبق مركزه على مركز الدائرة المارة برؤوسه. فإذا كان $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$; $M_3(x_3, y_3)$ فيلزم ويكفي أن نبرهن أن :

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{a}{2} ; \quad \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \lambda$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$(3) \quad y = \frac{4x^2 - a^2x - 5a^2}{2\lambda}$$

وبتعويض هذه القيمة في (1) نحصل على معادلة من الدرجة الرابعة في x تعين فصول نقاط التقاطع والتي هي الرأس $(a, 0)$ والنقط الثلاث M_1, M_2, M_3 فإذا قسمنا هذه المعادلة على $(x + a)$ وجدنا المعادلة:

$$16x^3 - 24ax^2 - (12\lambda^2 + 15a^2)x + 25a^3 + 12a\lambda^2 = 0$$

ومنه نجد :

$$(4) \quad x_1 + x_2 + x_3 = \frac{24a}{16} ; x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{-(12\lambda^2 + 15a^2)}{16}$$

وبالتالي فإن :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = \frac{33a^2 + 12\lambda^2}{8}$$

وبالعودة إلى (3) نجد :

$$(5) \quad y_1 + y_2 + y_3 = \frac{4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - a(x_1 + x_2 + x_3) - 15a^2}{2\lambda} = 3\lambda$$

من (4) و (5) نجد أن :

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{a}{2} ; \quad \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \lambda$$

وهو المطلوب .

مسائل ومقارن غير محلولة

٢٨٦ - اكتب معادلة الناطم للقطع الزائد $3x^2 - 7y^2 = 20$ من النقطة $(4, 2)$.

٢٨٧ - اكتب معادلات المماسات للقطع الزائد $3x^2 - y^2 = 48$ من النقطة $(2, 0)$.

٢٨٨ - نرمم من نقطة P من قطع زائد موازيين للخطين المقاربتين فيقطعاها في النقطتين C و D . برهن أن $PC \cdot PD = \frac{1}{4} a^2 e^2$.

٢٨٩ - يلاقي الناطم في P من القطع الزائد $x^2 - y^2 = a^2$ المحورين الاحداثيين في النقطتين G و H وبرهن أن P هو مركز الدائرة المارة بـ O و G و H .

٢٩٠ - نقطة P من القطع الزائد $xy = c^2$. المماس في P يلاقي محور السينات في A ومحور العيئات في B . النقطة C اختيارية على محور السينات ، والنقطة D من محور العيئات بحيث يكون BC موازياً AD . برهن أن CD مماس للقطع المفروض .

٢٩١ - اجث عن معادلة القطع الزائد الذي يمر بالنقط $(1, 1)$ ، $(-1, -2)$ ، $(2, 1)$.

ويقبل المستقيم : $x + y - 1 = 0$

خطاً مقارباً له .

٢٩٢ - ماهي معادلة القطع الزائد المتساوي الساقين إذا علمت خطه المقارب :

$$x - y + 1 = 0$$

ونقطتين منه (1 , 1) و (2 , 1) .

٢٩٣ - ماهي معادلة المماس للقطع الزائد :

$$5x^2 + 7xy + y^2 - x + 2y = 0$$

في نقطة الأصل :

٢٩٤ - P نقطة ما من قطع زائد ، N و N' مسقطاهما على محوري القطع ، T و T' نقطتا تقاطع المماس في P للقطع مع المحورين . G و G' نقطتا تقاطع الناظم في P مع المحورين . H مسقط المبدأ o على الناظم المذكور ، برهن :

$$\overline{OG} \cdot \overline{OT} = a^2 + b^2 \quad - ١$$

$$\overline{OG} = \frac{c^2}{a^2} \overline{ON} \quad - ٢$$

$$\overline{OG'} = \frac{c^2}{b^2} \overline{ON'} \quad - ٣$$

$$\overline{PH} \cdot \overline{PC} = -b^2 \quad - ٤$$

$$\overline{PH} \cdot \overline{PG'} = a^2 \quad - ٥$$

٢٩٥ - ليكن المستقيم Δ العمود على المحور $x'ox$ في نقطة H وليكن $OH = l$ بفرض $l > 0$ وليكن القطع الخروطي E المعروف بالهرق o والدليل Δ والتباعد المركزي e بفرض $e \neq 1$.

١ - احسب فصلي الدورتين A و A' الواقعتين على المحور $x'ox$ من القطع E ، وفصل مركزه وبعد الدليل الآخر Δ' عن o .

١ - عين قيمة التباعد المركزي e ليكون البعد بين الدليلين مساوياً $\frac{2l}{3}$. بين ان القطع المخروطي الموافق هو قطع زائد . اوجد معادلتى خطية المقارين .

٢٩٦ - ليكن لدينا القطع الزائد المتساوي السابق .

$$x = \frac{a}{\cos u} , \quad y = a \operatorname{tg} u$$

ان المماس في M من فرع اليمين يقطع الخطين في P و Q .

١ - احسب بدلالة u احداثيات P و Q ثم مركبات الشعاعين MP و MQ .

$$\overline{MF} \cdot \overline{MF'} = \overline{MP}^2 : \text{ برهن أن } ٢$$

$$\overline{OP} + \overline{OQ} = \overline{MF} + \overline{MF'} : \text{ برهن أن } ٣$$

٤ - احسب سطح المثلث MFP واستنتج أن بعد P عن MF ثابت .

٢٩٧ - دائرة تقطع قطع زائد في أربع نقط P_1, P_2, P_3, P_4 .

عمودان على أحد الخطين المقارين ، $P_2 M_2, P_1 M_1$ ، $P_4 N_4, P_3 N_3$ ، عمودان على الخط المقارب الآخر .

$$P_1 M_1 \cdot P_2 M_2 = P_3 N_3 \cdot P_4 N_4 : \text{ برهن أن } ٤$$

المُجَوِّبَةُ

$$7x + 6y = 40 \quad - \quad ٢٨٦$$

$$2x - 4 = \mp y \quad - \quad ٢٨٧$$

$$(x + y - 1)(2x - 3y - 3) + 4 = 0 \quad - ٢٩١$$

$$(x - y + 1)(x + y - 4) + 2 = 0 \quad - ٢٩٢$$

$$x - 2y = 0 \quad - ٢٩٣$$

$$x_A = \frac{e \ell}{e + \ell}, \quad x_{A'} = \frac{e \ell}{e - \ell} \quad - ٢٩٥$$

$$\frac{e^2 \ell}{e^2 - \ell} \quad \text{فصل المركز :}$$

بعد الدليل عن المركز o :

$$\frac{\ell (e^2 + 1)}{e^2 - 1}$$

$$e = 2 \quad (٢)$$

الخطان المقاربان :

$$y = \pm \sqrt{3} x \mp \frac{4 \ell}{\sqrt{3}} \quad - ٢٩٦$$

$$P \left(\frac{a \cos u}{1 - \sin u}, \frac{a \cos u}{1 - \sin u} \right); Q \left(\frac{a \cos u}{1 + \sin u}, \frac{-a \cos u}{1 + \sin u} \right)$$

$$\overline{MP} \left(a \operatorname{tg} u, \frac{a}{\cos u} \right); \overline{MQ} \left(-a \operatorname{tg} u, \frac{-a}{\cos u} \right)$$

$$s = \frac{a^2}{2 \cos u} (\sqrt{2} - \cos u)$$

الفصل التاسع

القطع المكافئ

١ - القطع المكافئ هو الحل الهندسي للنقط التي يبعد ما عن نقطة ثابتة تسمى المحرق يساوي بعدها عن مستقيم ثابت لا يمر بالنقطة الثابتة يسمى الدليل .

٢ - معادلة القطع المكافئ المنسوب لمحوره وللماسه في الذروة هي :

$$(1) \quad y^2 - 2 p x = 0$$

نسمي p وسيط القطع ويثل بعد المحرق عن الدليل .

٣ - إذا اتخذنا محرق القطع قطباً ومحوره محوراً قطبياً فنعدئذ تكون معادلة القطع القطبية :

$$r = \frac{p}{1 - \cos \theta}$$

٤ - كل مستقيم في مستوي القطع يقطعه على الاكثر بنقطتين .

٥ - معادلة الماس الذي فيه m للقطع (١) هي :

$$y = m x + \frac{p}{2 m}$$

ومعادلة الماس للقطع من نقطة واقعة عليه $M (x_0, y_0)$ هي :

$$y y_0 = p (x + x_0)$$

ومعادلة الناظم من نفس النقطة هي :

$$p (y - y_0) + y_0 (x - x_0) = 0$$

وميل المماسات المرسومة من نقطة ما $M (x_1 , y_1)$ للقطع المكافئ تعطي بالعلاقة .

$$2 x_1 m^2 - 2 y_1 m + p = 0$$

٦ - المحل الهندسي لمسقط المحرق على مماسات القطع هو المماس في الدروة والمحل الهندسي لنظير المحرق بالنسبة لمماسات القطع هو الدليل .

نحت المماس يساوي ضعف فاصلة نقطة التماس ونحت الناظم يساوي وسيط القطع .

٧ - القطر المرافق لاستقامة مفروضة m هو مستقيم بوازي محور القطع معادلته :

$$y = \frac{p}{m}$$

ومعادلة القطع المكافئ المنسوب الى أحد تماساته والى القطر المرافق لهذا المماس تكون من الشكل :

$$y_2 = 2 p_1 x$$

نماذج ومسابيل محلولة

٢٩٨ - يوهن أنه إذا تحركت نقطة في المستوي على شكل يكون فيه مربع بعدها عن مستقيم ثابت متناسباً مع بعدها عن مستقيم ثابت آخر لا بوازي الأول ، هو عبارة عن قطع مكافئ .

الحل :

لنتخذ نقطة تقاطع المستقيمين مبدأ للاحداثيات والمستقيم الأول محوراً للسينات والعمودي عليه محوراً للعينات فعندئذ تكون معادلة المستقيم الثاني هي :

$$a x + b y + c = 0$$

فاذا كانت $M (X , Y)$ نقطة ما من المستوي فعندئذ يكون بعدها عن المستقيم الأول هو Y وبعدها عن المستقيم الثاني هو :

$$\frac{|a X + b Y + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

فاذا كانت ثابتة للتناسب k فعندئذ يكون :

$$Y^2 = k \frac{|a X + b Y + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

وحيث أن الطرف الأيسر موجب يلزم ان يكون الطرف الايمن كذلك ، ولهذا يمكننا ان نكتب :

$$\pm Y^2 = \frac{k a}{\sqrt{a^2 + b^2}} X + \frac{k b}{\sqrt{a^2 + b^2}} Y + \frac{k c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

أو :

$$Y^2 = A X + B Y + C$$

وإذا سجبنا المحاور إلى النقطة $(-\frac{B^2 + 4 C}{4 A}, \frac{B}{2})$

حصلنا على معادلة من الشكل :

$$Y^2 = A X$$

وهي تمثل قطعاً مكافئاً وهو المطلوب .

٢٩٩ - أوجد معادلة القطع المكافئ إذا علمت أن ذروته تقع

على المستقيم :

$$2 y - 3 x = 0$$

وان محوره يوازي ox وانه يمر بالنقطة $(6, -1)$ ، $(3, 5)$.

الحل :

لنفرض أن ذروة القطع في النقطة (x_0, y_0) فعندئذ تكون معادلة القطع ، حيث أن محوره مواز لمحور السينات ، من الشكل :

$$(y - y_0)^2 = 2 p (x - x_0)$$

وبما أن القطع يمر بالنقطتين $(6, -1)$ و $(3, 5)$ ، كما أن ذروته تقع على المستقيم المفروض فإنه يكون :

$$(5 - y_0)^2 = 2 p (3 - x_0)$$

$$(1 + y_0)^2 = 2 p (6 - x_0)$$

$$2 y_0 - 3 x_0 = 0$$

وبحل جملة المعادلات هذه نجد الحل :

$$x_0 = 2 ; y_0 = 3 ; p = 2$$

والقطع المكافئ الموافق هو :

$$(y - 3)^2 = 4 (x - 2)$$

كما أننا نجد الحل :

$$x_0 = \frac{98}{33} ; y_0 = \frac{49}{11} ; p = \frac{54}{11}$$

والقطع المكافئ الموافق هو :

$$(y - \frac{49}{11})^2 = \frac{108}{11} (x - \frac{98}{33})$$

٣٠٠ - أوجد معادلة القطع المكافئ إذا علمت أن محرقه يقع في النقطة

(- 2 , - 1) وأن نقطتي تقاطعه مع وتره المحرق العمودي على محور القطع

هما $B (- 2 , - 4)$ ، $A (- 2 , 2)$

الحل :

سأبرهن قبل كل شيء ان طو الوتر المحرق العمودي على محور القطع

يساوي ضعف وسيط القطع . من أجل ذلك نفرض ان القطع منسوب

لمحوره وللماس في الذروة فعندئذ تكون معادلته :

$$y^2 = 2 p x$$

$$x = \frac{p}{2} \quad : \text{معادلة الوتر المحرق}$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد نقطتي التقاطع :

$$(\frac{p}{2} , - p) , (\frac{p}{2} , p)$$

والبعد بين هاتين النقطتين والذي يساوي طول الوتر المحرق المفروض

هو $2 p$.

وعلى هذا فان البعد بين النقطتين A و B يساوي ضعف الوسيط .

إذن :

$$2 p = \sqrt{36} = 6$$

$$p = 3 \quad \text{ومنه :}$$

ومن جهة أخرى نرى ان معادلة الوتر المحرق هي : $x = -2$

وبما ان وسيط القطع $p = 3$ فمعادلة الدليل هي أما :

$$x = 1 \quad \text{أو} \quad x = -5$$

فاذا كتبنا بعد نقطة ما (x, y) عن الدليل يساوي بعدها عن المحرق حصلنا في الحالة الأولى على المعادلة :

$$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = (x + 5)^2$$

$$y^2 + 2y - 6x - 20 = 0 \quad \text{أو}$$

وهي معادلة القطع المطلوبة وتمثل حلاً أولاً للمسألة المفروضة .

وفي الحالة الثانية نحصل على المعادلة :

$$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = (x - 1)^2$$

$$y^2 + 2y + 6x + 4 = 0 \quad \text{أو}$$

وهي معادلة ثانية تمثل حلاً آخر .

٣٠١ - يقطع مستقيم متحول ، قطعاً مكافئاً معلوماً ، في النقطتين

P و Q ، ويقطع محوره في B وبماسه في الرأس A . برهن العلاقة :

$$(1) \quad \overline{AP} \cdot \overline{AQ} = \overline{AB}^2$$

الحل :

لنرمز لمسطبي P و Q على محور القطع بـ P_1 و Q_1 فاذا لاحظنا أن

مسقط A هو ذروة القطع o فعندئذ يكون مسقط AP على محور القطع هو oP₁ ومسقط AQ هو oQ₁ ومسقط AB هو oB . وإذا كان α جيب تمام الزاوية التي يصنعها المستقيم المفروض مع محور القطع، فعندئذ يكون :

$$\overline{OP_1} = \alpha \overline{AP} ; \overline{oQ_1} = \alpha \overline{AQ} ; \overline{OB} = \alpha \overline{AB}$$

وبالتالي يكفي لبرهان العلاقة (1) أن نبرهن العلاقة :

$$\overline{oQ_1} \cdot \overline{oP_1} = \overline{oB}^2$$

لنفرض أن القطع منسوب لمحوره وبماسه في الذروة فعادلته :

$$y^2 = 2 p x$$

ولتكن معادلة المستقيم :

$$y = m x + h$$

ان فصول نقط تقاطع المستقيم مع القطع هي حلول المعادلة :

$$m^2 x^2 + 2 (m h - p) x + h^2 = 0$$

ومنه يلاحظ أن :

$$x_1 x_2 = \frac{h^2}{m^2}$$

ولكن x_1 يساوي $\overline{op_1}$ و x_2 يساوي $\overline{oQ_1}$ إذن :

$$\overline{oP_1} \cdot \overline{oQ_1} = \frac{h^2}{m^2}$$

ونلاحظ من حجة ثانية بسهولة أن فصل النقطة B هو $\frac{-h}{m}$ أي

$$\overline{OB}^2 = \frac{h^2}{m_2} \text{ ومنه نجد أن :}$$

$$\overline{OP_1} \cdot \overline{OQ_1} = \overline{OB}^2$$

وهو المطلوب .

٣٠٢ - نرسم من محرق قطع مكافئ F مستقيماً ميله m ، فيلاقي القطع في النقطتين A و B .

والمطلوب (١) حساب طول الوتر AB . (٢) إثبات أن $AB = 4 FM$ بفرض أن M هي نقطة تماس المماس للقطع الموازي لـ AB .

الحل :

(١) لنأخذ محرق القطع قطباً ومحوره محوراً قطبياً فعندئذ تكون معادلة القطع :

$$r = \frac{p}{1 - \cos \theta}$$

والمستقيم المار بالمحرق والذي ميله m يصنع مع محور القطع زاوية θ_0 ($\tan \theta_0 = m$) ، فالنقطة A توافق الزاوية القطبية θ_0 والنقطة B توافق الزاوية القطبية $\pi + \theta_0$ ولذلك فإن :

$$\overline{FA} = \frac{p}{1 - \cos \theta_0} ; \overline{FB} = \frac{p}{1 + \cos \theta_0}$$

ومنه :

$$(1) \quad \overline{AB} = \overline{FA} + \overline{FB} = \frac{2p}{\sin^2 \theta_0} = \frac{2p(1 + m^2)}{m^2}$$

(٢) لنسب القطع إلى محوره وبماسه في الذروة فتكون معادلته
 $y^2 = 2px$ وتكون معادلة مماسه في النقطة $M(x_0, y_0)$ هي
 $yy_0 = p(x + x_0)$ وبما أن ميل هذا المماس هو m إذن :
 $y_0 = \frac{p}{m}$ وبالتعويض في معادلة القطع نجد $x_0 = \frac{p}{2m^2}$ وعلى هذا يكون :

$$\overline{FM}^2 = \left(\frac{p}{2m^2} - \frac{p}{2} \right)^2 + \frac{p^2}{m^2} = \left(\frac{p}{2m^2} + \frac{p}{2} \right)^2$$

ومنه :

$$(2) \quad \overline{FM} = \frac{p}{2} \left(\frac{m^2 + 1}{m^2} \right)$$

بمقارنة (1) مع (2) نجد

$$\overline{AB} = 4 \overline{FM}$$

وهو المطلوب .

٣٠٣ - P و M و Q ثلاث نقط واقعة على قطع مكافئ و \widehat{PMQ} زاوية قائمة . برهن أنه إذا أدركنا هذه الزاوية حول الرأس M فإن المستقيم PQ يمر بنقطة ثابتة I . أوجد المحل الهندسي للنقطة I عندما تتحول النقطة M على القطع .

الحل :

لنسب القطع إلى محوره وبماسه في الذروة فتكون معادلته $y^2 = 2px$ ، ولنفرض أن α و β و γ تراتيب النقط P و M و Q على الترتيب فعندئذ

نجد بالتعويض في معادلة القطع أن فواصل هذه النقط هي $\frac{\alpha^2}{2p}$ و $\frac{\beta^2}{2p}$ و $\frac{\gamma^2}{2p}$ على الترتيب أي :

$$P \left(\frac{\alpha^2}{2p}, \alpha \right); M \left(\frac{\beta^2}{2p}, \beta \right); Q \left(\frac{\gamma^2}{2p}, \gamma \right)$$

وبما أن PM و MQ متعامدان فإننا نجد :

$$(1) \quad (\beta + \alpha)(\gamma + \beta) = -4p^2$$

وتكون معادلة pQ هي :

$$(2) \quad y - \gamma = \frac{2p}{\gamma + \alpha} \left(x - \frac{\gamma^2}{2p} \right)$$

وإذا حسبنا قيمة α من (1) وعوضناها في (2) ثم رتبنا المعادلة الناتجة حسب قيمة γ فإننا نجد :

$$(\gamma + \beta)\gamma^2 + (4p^2 - 2px + \beta^2)\gamma - (\beta^2 + 4p^2)y - 2px\beta = 0$$

ويعبر هذا المستقيم بنقطة ثابتة عندما يكون :

$$\gamma + \beta = 0$$

$$4p^2 - 2px + \beta^2 = 0$$

$$(\beta^2 + 4p^2)y + 2px\beta = 0$$

والحل المشترك لهذه المعادلات هو النقطة $I \left(\frac{\beta^2}{2p} + 2p, -\beta \right)$:

$$(3) \quad x = \frac{\beta^2}{2p} + 2p; \quad y = -\beta$$

فإذا تحولت النقطة M (أي إذا تحولت β) فعندما تكون معادلة I هي (بجذف β من المعادلتين (3)) :

$$x = \frac{y^2}{2p} + 2p$$

وهذه معادلة قطع مكافئ.

٣٠٤ - ليكن لدينا قطع مكافئ محرقه F ، وليكن A و B نقطتي تقاطع وتر يمر بالحرق مع القطع وليكن كذلك Δ_1 الناظم في A للقطع و Δ_2 الناظم في B . و M نقطة تقاطع الناظمين .

برهن :

١ - أن الناظمين Δ_1 و Δ_2 متعامدان .

٢ - أن المستقيم الذي يصل A بمنتصف AB يوازي محور القطع .

٣ - أن المحل الهندسي لـ M عندما يتحول محور القطع هو قطع مكافئ محوره محور القطع الأول .

الحل :

إذا نسبنا القطع إلى محوره والمماس في الذروة كانت معادلته :

$$(1) \quad y^2 = 2px$$

لنفرض الزاوية التي يصنعها الوتر المار بالحرق مع محور السينات هي φ فعندئذ تكون معادلته هذا الوتر هي :

$$(2) \quad y = \operatorname{tg} \varphi \cdot \left(x - \frac{p}{2} \right)$$

من (١) و (٢) نجد نقط التقاطع :

$$x_A = \frac{p}{2} \cdot \frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} \quad y_A = \frac{p \sin \varphi}{1 - \cos \varphi}$$

$$x_B = \frac{p}{2} \cdot \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \quad y_B = - \frac{p \sin \varphi}{1 + \cos \varphi}$$

ولما كان ميل الناظم في نقطة ما (x_1, y_1) على القطع هو :

$$m = \frac{-y_1}{p}$$

فان ميل Δ_1 هو :

$$m_1 = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - 1}$$

وميل Δ_2 هو :

$$m_2 = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi + 1}$$

وجداء الميلين :

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

وهو المطلوب الأول :

٢- إن معادلة الناظم Δ_1 هي :

$$Y = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - 1} X + \frac{p}{2} \sin \varphi \cdot \frac{3 - \cos \varphi}{(1 - \cos \varphi)^2}$$

ومعادلة الناظم Δ_2 هي :

$$Y = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi + 1} X - \frac{p}{2} \sin \varphi \cdot \frac{3 + \cos \varphi}{(1 + \cos \varphi)^2}$$

من هاتين المعادلتين نجد احداثيات النقطة M :

$$X = \frac{p}{2} \frac{3 + \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}, \quad Y = p \operatorname{ctg} \varphi.$$

وبالاستعانة باحداثيات النقط A و B نجد احداثيات منتصف القطعة AB :

$$\frac{p}{2} \frac{1 + \cos^2 \varphi}{1 - \cos^2 \varphi}, \quad p \operatorname{ctg} \varphi$$

ولما كان ترتيب هذه النقطة يساوي ترتيب النقطة M فان المستقيم الذي يصل بينهما يوازي محور السينات الذي هو محور القطع .

٣ - إذا حذفنا الوسيط من احداثيات النقطة M وجدنا :

$$Y^2 = \frac{p}{2} X - \frac{3 p^2}{4}$$

وهي معادلة قطع مكافئ محوره هو محور السينات وأما ذروته

فتقع في النقطة $(\frac{3p}{2}, 0)$.

٣٠٥ - لنكن القطوع المكافئة :

$$y^2 + \mu^2 x^2 - 2 \mu x y - 4 b \mu^2 x = 0$$

حيث b طول ثابت و μ وسيط متحول .

١ - برهن أن المحل الهندسي لنقط تماس المماسات الممازية لمحور

السينات هو مستقيم مواز لمحور العينات .

٢ - عين كلاً من محرق القطع ودليله بدلالة الوسيط ثم اوجد

المحل الهندسي لمرسعات النقطة $B(b, o)$ على الدليل وذلك عندما يتحول الوسيط .

الحل :

نفرض أن معادلة المماس الموازي لمحور السينات هي $y = h$ فاذا عرضنا في معادلة القطع وجدنا :

$$(1) \quad \mu^2 x^2 - 2\mu(h + 2b\mu)x + h^2 = 0$$

وهي معادلة فصول نقط التقاطع .

وبكتابة شرط التماس وهو ان يكون مميز المعادلة (1) معدوماً نجد :

$$h = -b\mu$$

وأما فاصلة نقطة التماس في الجذر المضاعف لـ (1) أي :

$$x = \frac{1}{\mu} (h + 2b\mu) = b$$

وهذا يعني أن المحل الهندسي لنقط تماس المماسات المفروضة هو المستقيم $x = b$ الموازي لمحور السينات .

٢ - لنكتب معادلة القطع على الشكل (انظر الفصل الثاني) :

$$(y - \mu x + \lambda)^2 = 2\mu(2b\mu - \lambda)x + 2\lambda y + \lambda^2$$

ولنعين λ على شكل يتعامد فيه المستقيمان :

$$y - \mu x + \lambda = 0$$

$$2\mu(2b\mu - \lambda)x + 2\lambda y + \lambda^2 = 0$$

فتجد :

$$\lambda = \frac{2 b \mu^3}{1 + \mu^2}$$

وبالتعويض بـ (2) نجد :

$$\left(y - \mu x + \frac{2 b \mu^3}{1 + \mu^2} \right)^2 = \frac{4 b \mu^2}{1 + \mu^2} \left(x + \mu y + \frac{b \mu^4}{1 + \mu^2} \right)$$

فمعادلة محور القطع هي :

$$(3) \quad y - \mu x + \frac{2 b \mu^3}{1 + \mu^2} = 0$$

ومعادلة المماس في الذروة هي :

$$(4) \quad x + \mu y + \frac{b \mu^4}{1 + \mu^2} = 0$$

فاذا اتخذنا المستقيم (3) محوراً للسينات و (4) محوراً للعينات

فعندها تأخذ دساتير نقل المحاور الشكل :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{b \mu^4}{(1 + \mu^2)^2} + \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} X + \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} Y \\ y = \frac{-b \mu^3 (2 + \mu^2)}{(1 + \mu^2)^2} + \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} X - \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} Y \end{array} \right. (5)$$

بالتعويض في معادلة القطع نجد :

$$Y^2 = \frac{4 b \mu^2}{(1 + \mu^2)^{\frac{3}{2}}} X$$

من هذه المعادلة نرى ان وسيط القطع يساوي $p = \frac{2 b \mu^2}{(1 + \mu^2)^{\frac{3}{2}}}$

وان معادلة الدليل هي : $X = - \frac{p}{2}$

وبالعودة إلى الاحداثيات القديمة نجد من (5) ان معادلة الدليل هي :

$$x + \mu y + b \mu^2 = 0$$

وأما احداثيات المحرق في الاحداثيات الجديدة فهي :

$$X = \frac{P}{2} ; Y = 0$$

وفي الاحداثيات القديمة :

$$x = \frac{-b \mu^2}{1 + \mu^2} \quad y = \frac{-b \mu^3}{1 + \mu^2}$$

هذا ولما كان ميل الدليل $= \frac{1}{\mu}$ فان معادلة العمودي النازل

من B على الدليل هي :

$$y = \mu (x - b)$$

وتقاطعه مع الدليل يعطي $x = 0$

فالحل الهندسي لمرسبات النقطة B على الدليل هو محور العينات .

مسائل وتمارين غير محلولة

٣٠٦ - اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يقع محرقه في النقطة

(1, 3) وذروته في النقطة (3, -2) .

٣٠٧ - لدينا قطعان مكافئات متساويان متحدان في الذروة ومحور

الأول عمودي على محور الثاني برهن أن الزاوية التي يصنعها المماس للأول

مع المماس الثاني تحقق العلاقة :

$$\lg V = \frac{8}{4}$$

٣٠٨ - برهن أنه إذا رسمنا من نقطة P مماسان لقطع مكافئ محرقه F وكانت Q و Q' نقطتي التماس فعندئذ يكون :

$$\overline{FP}^2 = FQ \cdot FQ'$$

٣٠٩ - انرسم من نقطة ثابتة A قاطعاً متحولاً لقطع مكافئ يقطعه في نقطتين K و H .

برهن أن المحل الهندسي لنقطة تقاطع الناطمين المنشأين من K و H على القطع هو قطع مكافئ آخر .

٣١٠ - عين المحل الهندسي لمركز دائرة متحولة تمس دائرة ثابتة ومستقيماً ثابتاً .

٣١١ - ليكن لدينا قطعاً مكافئاً محرقه F و T نقطة ما على المماس لهذا القطع في النقطة F .

M مسقط T على FP و N مسقط T على الدليل . برهن أن :

$$FM = TN$$

الاجوبير

$$y^2 - 6y - 12x - 15 = 0 \quad - 306$$

٣١٠ - المحل الهندسي هو قطع مكافئ محرقه يقع في مركز الدائرة

الثابتة ودليله يوازي المستقيم الثابت ويبعد عنه بمقدار نصف قطر الدائرة الثابتة في الجانب الآخر بالنسبة لمركزها .

الفصل العاشر

منحنيات الدرجة الثانية في المستوى

١ - المعادلة العامة لمنحنيات الدرجة الثانية هي :

$$(1) \quad A x^2 + 2 B x y + C y^2 + 2 D x + 2 E y + F = 0$$

شرط أن لا تنعدم A و B و C بأن واحد ، والا لانقلب إلى معادلة من الدرجة الأولى ، وعندئذ تمثل (بوجه عام) مستقيماً في المستوى .

٢ - ل نرمز ب :

$$\delta = AC - B^2 ; \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} ; \quad H = \frac{\Delta}{\delta}$$

(١) إذا كان $\delta \neq 0$ و $\Delta = 0$ فالمعادلة (1) تمثل مستقيمين متقاطعين ،
حقيقيين إذا كان $\delta < 0$ وتخيليين إذا كان $\delta > 0$.

(٢) إذا كان $\delta < 0$ و $\Delta \neq 0$ فالمعادلة تمثل قطعاً زائداً .

(٣) إذا كان $\delta > 0$ و $\Delta \neq 0$ فالمعادلة تمثل قطعاً ناقصاً ، حقيقياً أو تخيلاً حسباً يكون الجداء $H (A + C)$ سالباً أو موجباً ويكون هذا القطع دائرة عندما $B = 0$ و $A = C$ وهي حقيقية أو تخيلية حسباً يكون $A.H$ سالباً أو موجباً .

(٤) إذا كان $\delta = 0$ وعندئذ إما أن يكون :

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} \neq \frac{D}{E}$$

وعندئذ تمثل المعادلة قطعاً مكافئاً ، أو أن يكون :

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{D}{E}$$

وعندئذ تمثل المعادلة مستقيمين متوازيين ، تحليين عندما $F > \frac{D^2}{A}$ ومنطبعين

عندما $F = \frac{D^2}{A}$ ومتوازيين حقيقيين عندما $F < \frac{D^2}{A}$.

٣ - يمكن بعملية نقل ملائمة للدحاور الاحداثية رد المعادلة من الدرجة الثانية إلى أبسط شكل لها (راجع الفصل الثاني) .

٤ - يمكن تعيين نصفي محوري القطع (عندما $\Delta \neq 0$) بأن نحري انساباً إلى مركز التناظر فتأخذ معادلة المنحني الشكل :

$$A x^2 + 2 B x y + C y^2 + H = 0$$

ثم نقاطعه مع الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$ ونكتب شرط تماس الدائرة مع القطع فعندئذ نجد دائرتين يكون نصف قطرهما مساويين لنصفي قطري القطع .

٥ - يمكن تعيين الماس في الذروة ومحور القطع المكافئ مباشرة وفق مايلي :
نكتب معادلة القطع بالشكل :

$$(Ax+By + \lambda)^2 = 2 A (\lambda - D) x + 2 (B \lambda - AE) y + \lambda^2 - AF$$

ثم نعين λ بحيث يكون المستقيم :

$$(2) \quad A x + B y + \lambda = 0$$

متعامداً مع المستقيم :

$$(3) \quad 2 A (\lambda - D) x + 2 (B \lambda - AE) y + \lambda^2 - AF = 0$$

ثم نعوض قيمة λ في (2) و (3) فنحصل على معادلة محاور القطع ومماسه في الذروة .

مسائل وتمارين محلولة

عين نوع كل من منحنيات الدرجة الثانية التالية :

$$x^2 y + x - 2y + 3 = 0 \quad - ٣١٢$$

الحل :

نلاحظ أن :

$$A = C = 0 ; \quad B = \frac{1}{2} ; \quad D = \frac{1}{2} ; \quad E = -1 ; \quad F = 3$$

وبالتالي :

$$\delta = -\frac{1}{4} < 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{5}{4} \neq 0$$

فالمعادلة تمثل قطعاً زائداً لأن $\delta < 0$ و $\Delta \neq 0$.

$$41x^2 - 84xy + 76y^2 = 168 \quad - ٣١٣$$

الحل :

$$A = 41 ; \quad B = -42 ; \quad C = 76 ; \quad D = E = 0 ; \quad F = -168$$

$$\delta = 41 \cdot 76 - (-42)^2 > 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 41 & -42 & 0 \\ -42 & 76 & 0 \\ 0 & 0 & -168 \end{vmatrix} = -168 \delta \neq 0$$

فالمعادلة تمثل قطعاً ناقصاً . ان هذا القطع حقيقي لأن :

$$H(A + C) = -168(41 + 76) < 0$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + x - y + 2 = 0 \quad - ٣١٤$$

الحل :

$$A = 1, \quad B = -2; \quad C = 4; \quad D = \frac{1}{2}, \quad E = -\frac{1}{2}; \quad F = 2$$

$$\delta = AC - B^2 = 0$$

فالمعادلة تمثل قطعاً مكافئاً او مستقيمين متوازيين . ولكن :

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} \neq \frac{D}{E}$$

فالمنحنى هو قطع مكافئ فعلاً .

$$x^2 - 2xy + y^2 - x + y - 2 = 0 \quad - ٣١٥$$

الحل :

$$A = C = 1, \quad B = -1, \quad D = -\frac{1}{2}, \quad E = \frac{1}{2}, \quad F = -2$$

$$\delta = AC - B^2 = 0$$

$$\frac{A}{B} = -1, \quad \frac{B}{C} = -1, \quad \frac{D}{E} = -1$$

أي :

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{D}{E}$$

فالمعادلة تمثل مستقيمين متوازيين . وبما أن :

$$F < \frac{D^2}{A}$$

فالمستقيمان حقيقيان :

يمكن كتابة المعادلة بالشكل :

$$(x - y - \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4}$$

فالمستقيمان هما :

$$x - y - \frac{1}{2} = \pm \frac{3}{2}$$

$$2x^2 + 3xy + 4y^2 + 2x - 3y + 5 = 0 \quad - \quad ٣١٦$$

الحل :

$$A = 2 , B = 3/2 , C = 4 , D = 1 , E = - \frac{3}{2} , F = 5$$

$$\delta = AC - B^2 = \frac{23}{4} > 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & 4 & -3/2 \\ 1 & -3/2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{63}{4}$$

فالمعادلة تمثل قطعاً ناقصاً ولكن هذا القطع تخيلي لأن :

$$H(A + C) = \frac{63}{23} (2 + 4) > 0$$

٣١٧ - بين أن المعادلة :

$$17x^2 - 12xy + 8y^2 - 68x + 24y - 12 = 0$$

تمثل قطعاً ناقصاً . احسب نصف قطريه واوجد معادلتي محوريه

التناظريين .

الحل :

$$A = 17, B = -6, C = 8, D = -34, E = 12, F = -12$$

$$\delta = AC - B^2 = 100 > 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 17 & -6 & -34 \\ -6 & 8 & 12 \\ -34 & 12 & -12 \end{vmatrix} = -8000 \neq 0$$

$$H(A + C) = -80(25) < 0$$

فالمعادلة تمثل قطعاً ناقصاً حقيقياً .

لحساب نصف قطري القطع وتعيين معادلاتي محوريه نسحب المحاور لاحداثية إلى مركز القطع فتأخذ معادلته الشكل :

$$(1) \quad 17x_1^2 - 12x_1y_1 + 8y_1^2 - 80 = 0$$

ثم نقاطه مع الدائرة :

$$(2) \quad x_1^2 + y_1^2 = r^2$$

لنضرب (1) بـ r^2 (2) بـ 80 ثم نطرح فنجد :

$$(3) \quad (17r^2 - 80)x_1^2 - 12r^2x_1y_1 + (8r^2 - 80)y^2 = 0$$

ويكون لهذه المعادلة جذر مضاعف عندما :

$$36r^4 - (17r^2 - 80)(8r^2 - 80) = 0$$

ومنه :

$$r^4 - 20r^2 + 64 = (r^2 - 16)(r^2 - 4) = 0$$

ومنه :

$$r_1^2 = 16 = a^2$$

$$r_2^2 = 4 = b^2$$

فنصفا قطري القطع هما 4 و 2 .

لنعوض r بـ 4 في (3) فنجد :

$$4 x_1^2 - 4 x_1 y_1 + y_1^2 = (2 x_1 - y_1)^2 = 0$$

فمعادلة المحور الأول في الجملة الجديدة (للناجحة من سحب الجملة القديمة إلى مركز القطع) هي :

$$(4) \quad 2 x_1 - y_1 = 0$$

وإذا عوضنا r بـ 2 في (3) فإننا نجد معادلة المحور الثاني هي :

$$(5) \quad x_1 + 2 y_1 = 0$$

وإذا أردنا كتابة معادتي المستقيمين (4 و 5) في الجملة القديمة نلاحظ أن مركز القطع يقع في النقطة (2 , 0) (انظر الفصل الثاني) ، ولذلك فإن دساتير نقل المحاور هي :

$$x = x_1 + 2 , \quad y = y_1$$

بالتعويض في (4) و (5) نجد :

$$2 x - y = 4 , \quad x + 2 y = 2$$

ملاحظة : يمكن الحصول على المعادلتين (1) و (2) انطلاقاً من

(1) بشكل آخر :

إن أمثال توجيه الناظم على القطع (1) في النقطة (x_1, y_1) هي

[نحصل عليهما بالاستقاق الجزئي بالنسبة لـ x_1 و y_1] .

$$34 x_1 - 12 y_1 , \quad - 12 x_1 + 16 y_1$$

أو (بالاختصار)

$$17 x_1 - 6 y_1 \quad ; \quad - 6 x_1 + 8 y_1$$

واكتننا نعلم أن الناظم لا يمر في مركز القطع إلا في ذرى القطع ،
ولذلك تتعين هذ، الذرى بكتابة شرط توازي الناظم في (x_1, y_1)
مع نصف القطر الشعاعي المتعلق بهذه النقطة :

$$(6) \quad \begin{cases} 17 x_1 - 6 y_1 = \lambda x_1 \\ - 6 x_1 + 8 y_1 = \lambda y_1 \end{cases}$$
$$(17 - \lambda) x_1 - 6 y_1 = 0$$
$$- 6 x_1 + (8 - \lambda) y_1 = 0$$

كي يكون لهاتين المعادلتين حل غير الحل التافه يلزم ان ينعدم
معين الأمثال :

$$\begin{vmatrix} 17 - \lambda & - 6 \\ - 6 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 25 \lambda + 100 = 0$$

وحلا هذه المعادلة هما $\lambda = 20$ و $\lambda = 5$

فإذا عوضنا القيمة الأولى في احدى معادلتى (6) نجد :

$$2 x_1 - y_1 = 0$$

وإذا عوضنا القيمة الثانية نجد :

$$x_1 + 2 y_1 = 0$$

٣١٨ - عين محور القطع المكافئ :

$$x^2 - 4 x y + 4 y^2 - 4 x + 38 y + 49 = 0$$

وبماسة في الذروة .

الحل :

نكتب معادلة القطع بالشكل :

$$(x - 2y)^2 = 4x - 38y - 49$$

وهذه المعادلة تكتب بالشكل :

$$(x - 2y + \lambda)^2 = (4 + 2\lambda)x + (-38 - 4\lambda)y - 39 + \lambda^2$$

ثم نعين λ بحيث يتعامد المستقيم :

$$(1) \quad x - 2y + \lambda = 0$$

مع المستقيم:

$$(2) \quad (4 + 2\lambda)x + (-38 - 4\lambda)y - 49 + \lambda^2 = 0$$

ف نجد $\lambda = -8$ بالتعويض في (1) و (2) نحصل على الترتيب على معادلة محور القطع ومماسه في الذروة :

$$x - 2y - 8 = 0$$

$$4x + 2y - 5 = 0$$

٣١٩- بين أن المعادلة :

$$-5x^2 + 11xy - 2y^2 - 6x + 3y - 1 = 0$$

تمثل مستقيمين متقاطعين . أوجد معادلتها

الحل :

$$\Delta \neq 0 \quad ; \quad \Delta = 0 \quad \text{إن :}$$

فالمعادلة تمثل مستقيمين متقاطعين . يلاحظ أنه يمكن كتابة المعادلة بالشكل :

$$(5x - y + 1)(-x + 2y - 1) = 0$$

فالمستقيمان هما : $5x - y + 1 = 0$; $x - 2y + 1 = 0$

٣٢٠ - ناقش نوع القطع المعرف بالمعادلة :

$$\lambda x^2 - 2xy + \lambda y^2 - 2(\lambda + 1)x + 2y + 2 = 0$$

حسب القيم الوسيط λ .

الحل :

إت :

$$\delta = \lambda^2 - 1 ; \Delta = -\lambda^3 , H = \frac{\lambda^3}{1 - \lambda^2}$$

الحالة الاولى : $\lambda^2 - 1 \neq 0$ وهنا نميز حالتين : (١) $\lambda = 0$ وعندئذ تمثل المعادلة مستقيمين متقاطعين :

$$-2xy - 2x + 2y + 2 = -2(x - 1)(y + 1) = 0$$

$$x = 1 , y = -1 \quad \text{فهما :}$$

(٢) $\lambda \neq 0$ والمعادلة تمثل قطعاً زائداً أو ناقصاً حسب إشارة δ . فإذا كان $\lambda^2 - 1 < 0$ أي $1 < \lambda < -1$ فالمعادلة تمثل قطعاً زائداً ، أما إذا كان $\lambda > 1$ أو $\lambda < -1$ فالمعادلة تمثل قطعاً ناقصاً ، وهذا التقطع

$$H(A + C) = \frac{-2\lambda^4}{\lambda^2 - 1} < 0 \quad \text{حقيقي لأن :}$$

الحالة الثانية : $\lambda^2 - 1 = 0$ أي $\lambda = \pm 1$ وفي هاتين الحالتين يكون

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} \neq \frac{D}{E} . \quad \text{والمعادلة تمثل قطعاً مكافئاً .}$$

٣٢١ - ناقش حسب وضع النقطة $M(\alpha, \beta)$ نوع القطع :

$$\alpha x^2 + 2\beta xy - (\alpha - 2)y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$$

الحل :

إث :

$$\delta = 2\alpha - \alpha^2 - \beta^2 ; \quad \Delta = -2(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha - \beta + 1)$$

ويكون $\delta = 0$ على محيط الدائرة C_1 :

$$(\alpha - 1)^2 + \beta^2 = 1$$

التي مركزها $(1, 0)$ ونصف قطرها 1 . ويكون $\delta > 0$ داخل هذه الدائرة و $\delta < 0$ خارجها ويكون $\Delta = 0$ على محيط الدائرة C_2 :

$$(\alpha - 1)^2 + (\beta - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

التي مركزها $(1, \frac{1}{2})$ ونصف قطرها $\frac{1}{2}$. وتقع C_2 داخل C_1 وتمسها في النقطة $(1, 1)$. ويكون $\Delta < 0$ داخل الدائرة C_2 و $\Delta > 0$ خارجها .

من هذا نستنتج ما يلي :

(١) النقطة M خارج C_1 فعندئذ يكون $\delta < 0$ و $\Delta \neq 0$ والقطع زائد .

(٢) النقطة M داخل C_2 فعندئذ يكون $\delta > 0$ و $\Delta \neq 0$ والقطع ناقص وحيث أنه يكون هناك $H(A + C) = \frac{\Delta}{\delta} (A + C) < 0$ فالمقطع حقيقي .

(٣) النقطة M داخل الحلقة بين C_1 و C_2 فعندئذ يكون $\delta > 0$ و $\Delta \neq 0$ و $H(A + C) > 0$ والمعادلة تمثل قطعاً ناقصاً وهمياً .

(٤) النقطة M على محيط C_1 (دون النقطة I) فعندئذ يكون $\Delta = 0$ و $\delta \neq 0$ والمعادلة تمثل مستقيمين متقاطعين تخيليين لأن $\delta > 0$.
 (٥) النقطة M على محيط C_1 فعندئذ يكون $\delta = 0$ فإذا كان $\alpha \neq 1$ فعندئذ يكون $\frac{A}{B} = \frac{B}{C} \neq \frac{D}{E}$ والمعادلة تمثل قطعاً مكافئاً أما إذا كان $\alpha = 1$ وبالتالي $\beta = \mp 1$ فالمعادلة تمثل مستقيمين متوازيين وبما أنه يكون هناك $F > \frac{D^2}{A}$ فالمستقيمان تخيليان.

٣٢٢ - اكتب معادلة المماس للقطع :

$$(1) \quad 3y^2 - 10xy - 8x^2 - 9y + 6x + 5 = 0$$

$$y = 2x + 1 \quad \text{الموازي للمستقيم .}$$

الحل :

ان معادلة المماس من الشكل $y = 2x + h$. نعوض في (1) ونرتب وفق قوى x فنجد :

$$-16x^2 + 2(h-6)x + 3h^2 - 9h + 5 = 0$$

لنكتب شرط التماس وهو أن يكون بميز هذه المعادلة معدوماً فنجد قيمتين لـ h هما 2 و $\frac{58}{49}$ فللمسألة حلان .

$$y = 2x + 2 \quad , \quad y = 2x + \frac{58}{49}$$

٣٢٣ - أوجد معادلة القطر المرافق لاستقامة محاور السينات في القطع :

$$5y^2 - 3yx + 2x^2 - y + x - 4 = 0$$

الحل :

ان معادلة المستقيمت الموازية لمحور السينات هي :

$$(1) \quad y = h$$

وان فصول نقط تقاطع القطع مع هذه المستقيمت تعطى بالمعادلة :

$$2x^2 + (1 - 3h)x + 5h^2 - h - 4 = 0$$

ويكون فصل منتصف الوتر الواصل بين نقطتي التقاطع .

$$(2) \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3h - 1}{4}$$

بجذف h بين (1) و (2) نجد المعادلة المطلوبة .

$$3y - 4x - 1 = 0$$

٣٢٤ - عين المستقيمتين المقاربتين للقطع الزائد :

$$3y^2 - 5xy - 2x^2 - 2y - 4x + 2 = 0$$

الحل :

نقسم على x^2 ثم نجعل $x \rightarrow \infty$ فعندئذ $\frac{y}{x} \rightarrow m$ ونحصل :

$$3m^2 - 5m - 2 = 0$$

ومنه $m = 2$ و $m = -\frac{1}{3}$ وهذه هي المناحي المقاربة .

ثم نعين مركز القطع بجمل المعادلتين :

$$-4x - 5y - 4 = 0$$

$$-5x + 6y - 2 = 0$$

$$- 324 -$$

فوجد $C \left(\frac{34}{49}, -\frac{12}{49} \right)$. وتكون معادلة الخط المقارب الأول (ميله

2 وير بـ C) :

$$y - 2x - \frac{8}{7} = 0$$

ومعادلة الخط المقارب الثاني :

$$3y + x + \frac{10}{7} = 0$$

مسائل وممارين غير محلولة

عين نوع كل من منحنيات الدرجة الثانية التالية :

$$3x^2 - 6xy + 2y^2 - 4x + 2y + 1 = 0 \quad - \quad ٣٢٥$$

$$6x^2 + 4xy + y^2 + 4x - 2y + 2 = 0 \quad - \quad ٣٢٦$$

$$4x^2 + 6xy + y^2 - 10x - 10 = 0 \quad - \quad ٣٢٧$$

$$2x^2 + xy - 6y^2 - 3x + 8y - 2 = 0 \quad - \quad ٣٢٨$$

$$9x^2 - 6xy + y^2 - 3x + y - 2 = 0 \quad - \quad ٣٢٩$$

$$9x^2 - 6xy + y^2 - 4x + y - 2 = 0 \quad - \quad ٣٣٠$$

$$5x^2 + 4xy + 3y^2 + 2x - 2y + 3 = 0 \quad - \quad ٣٣١$$

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y = 0 \quad - \quad ٣٣٢$$

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0 \quad - \quad ٣٣٣$$

احسب نصفي قطري القطعين التاليين :

$$32x^2 + 52xy - 7y^2 + 180 = 0 \quad - \quad ٣٣٤$$

$$9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0 \quad - \quad ٣٣٥$$

٣٣٦ - عين محور القطع المكافئ

$$4x^2 + 4xy + y^2 - 7x + 4y - 8 = 0$$

ومماسه في الذروة .

٣٣٧ - ناقش نوع القطع المعرف بالمعادلة التالية وذلك حسب قيم الوسيط λ :

$$x^2 + 2\lambda xy + (\lambda + 2)y^2 - 2x - 2\lambda y - 3 = 0$$

٣٣٨ - ناقش حسب وضع النقطة $M(\alpha, \beta)$ نوع القطع :

$$x^2 - 2\alpha xy + y^2 - 2\beta x + 1 = 0$$

٣٣٩ - تقع النقطة $(3, 2)$ على القطع :

$$3y^2 + xy - 2x^2 - 27y + 8x + 30 = 0$$

والمطلوب كتابة معادلة مماس القطع في هذه النقطة .

٣٤٠ - أوجد معادلة القطر المرافق للاستقامة التي ميلها 5 وذلك من أجل للقطع :

$$3y^2 - 4xy + 3y + x - 1 = 0$$

٣٤١ - اكتب معادلتني محوري القطع :

$$y^2 - 3xy + 5y^2 + 2y - 3x - 5 = 0$$

٣٤٢ - عين محرق ودليل القطع المكافئ :

$$(x - y)^2 + 2x - 2y - 1 = 0$$

المجموعة

- ٣٢٥ - قطع زائد ٣٢٦ - قطع ناقص ٣٢٧ - قطع زائد
- ٣٢٨ - مستقيمان متقاطعان حقيقيان ٣٢٩ - مستقيمان متوازيان حقيقيان
- ٣٣٠ - قطع مكافئ .
- ٣٣١ - قطع ناقص تخيلي ٣٣٢ - مستقيمان متوازيان تخيليان
- ٣٣٣ - مستقيمان منطبقان .
- ٣٣٤ - (3 , 2) - ٣٣٥ - (4 , 2)
- ٣٣٦ - $2x + y - 1 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$
- ٣٣٧ - المعادلة تمثل قطعاً زائداً عندما $\lambda > 2$ أو عندما $\lambda < -1$
- وتمثل قطعاً ناقصاً عندما $-1 < \lambda < 2$ ، وتمثل مستقيمين متوازيين عندما $\lambda = 2$ أو عندما $\lambda = -1$.
- ٣٣٨ - المعادلة تمثل قطعاً زائداً عندما $\alpha > 1$ وعندما $\alpha < -1$
- وتمثل قطعاً ناقصاً ضمن الشريط $-1 < \alpha < 1$ ، حقيقياً خارج الدائرة $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ ووهيماً داخل هذه الدائرة .
- وأما على محيط الدائرة $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ باستثناء النقطتين ($\beta = 0$) و
- ($\alpha = \pm 1$) فتمثل المعادلة مستقيمين متقاطعين .
- وعلى المستقيمين $\alpha = \mp 1$ فإن المعادلة تمثل قطعاً مكافئاً باستثناء الحالة
- عندما $\beta = 0$ فتمثل مستقيمين متوازيين تخيليين .

$$6y + x - 12 = 0 \quad - \quad ٣٣٩$$

$$13y - 10x + 8 = 0 \quad - \quad ٣٤٠$$

$$y - 3x + 1 = 0 , \quad 3y + x + 3 = 0 \quad - \quad ٣٤١$$

$$(1 , 2) , \quad x + y - 3 = 0 \quad - \quad ٣٤٢$$

الفصل الحادي عشر

سطوح الدرجة الثانية

- ١ - يمكن بوساطة دوران وانسحاب ملائمين رد كل معادلة من الدرجة الثانية في x و y و z إلى شكل بسيط نعرف منه نوع السطح الذي تمثله المعادلة .
- ٢ - إن المعادلة :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

تمثل مجسم قطع ناقص ، وإذا كانت إشارة أحد الحدود في الطرف الأيسر سالبة فعندئذ تمثل المعادلة مجسم قطع زائد وحيد الفرع وإن كانت إشارة حدين سالبة فالمعادلة تمثل مجسم قطع زائد بفرعين .

وإن المعادلة :

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

تمثل مجسم قطع مكافئ ناقص إذا كانت إشارة الحدين في الطرف الأيسر من نوع واحد ، وتمثل مجسم قطع مكافئ زائد إن كانت الاشارتان من نوعين مختلفين .

مسائل وتمارين محلولة

٣٤٣ - برهن أن الحل الهندسي للنقط التي مجموع مربعي بعديها عن المستقيمين :

$$\begin{cases} y = x \operatorname{tg} \theta \\ z = c \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x \operatorname{tg} \theta \\ z = c \end{cases}$$

يساري كمية ثابتة هو مجسم قطع ناقص . احسب انصاف محاور هذا المجسم .

ليكن $M(x, y, z)$ نقطة من المحل الهندسي وليكن d و d' بعدي M عن المستقيم المفروض ، فاذا لاحظنا أن كلا من المستقيمين المفروضين يعطى بمستويين متعامدين فعندئذ نجد :

$$d^2 = (z - c)^2 + (y - x \operatorname{tg} \theta)^2 \cos^2 \theta$$

$$d'^2 = (z - c)^2 + (y + x \operatorname{tg} \theta)^2 \cos^2 \theta$$

فاذا وضعنا $d^2 + d'^2 = 2a^2$ (a ثابت) فان المعادلة المطلوبة هي :

$$x^2 \operatorname{tg}^2 \theta + y^2 \cos^2 \theta + (z - c)^2 = a^2$$

فانصاف أقطار الجسم هي $(a \operatorname{ctg} \theta, a / \cos \theta, a)$.

٣٤٤ - تمثل المعادلة التالية :

$$\frac{x^2}{a^2 - t} + \frac{y^2}{b^2 - t} + \frac{z^2}{c^2 - t} = 1 \quad (a > b > c)$$

عندما يتحول الوسيط t ، مجموعة سطوح من الدرجة الثانية . برهن أنه يمر في كل نقطة من الفراغ ثلاثة سطوح من المجموعة . ثم برهن أن هذه السطوح هي مجسم قطع ناقص ومجسم قطع زائد وحيد الفرع ومجسم قطع زائد ذو فرعين .

الحل :

لنرتب المعادلة وفق قيم t فنجد :

$$f(t) \equiv (a^2 - t)(b^2 - t)(c^2 - t) - (b^2 - t)(c^2 - t)x^2 - \dots = 0$$

وبما أنها معادلة من الدرجة الثالثة في t ففي كل نقطة من الفراغ تمر ثلاثة سطوح من المجموعة توافق الحلول الثلاثة لهذه المعادلة . ولكن إذا أمعنا النظر في الجدول :

t	$-\infty$	c^2	b^2	a^2	$+\infty$
$f(t)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$

فإننا نلاحظ أن $f(t)$ تنعدم من أجل ثلاث قيم حقيقية لـ t ، الاولى أصغر من c^2 (وهذه تعطي مجسم قطع ناقص) والثانية محصورة بين c^2 و b^2 (وهذه تعطي مجسم قطع زائد وحيد الفرع) والثالثة محصورة بين b^2 و c^2 (وهذه تعطي مجسم قطع زائد بفرعين) .

٣٤٥ - أوجد المحل الهندسي للنقط التي تقع على مجسم قطع زائد وحيد الفرع والتي يمر منها مولدان متعامدان .

الحل :

لنفرض أن معادلة المجسم هي :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

وهذه تكتب بالشكل :

$$(1) \quad \frac{\frac{y}{b} + \frac{z}{c}}{1 + \frac{x}{a}} = \frac{1 - \frac{x}{a}}{\frac{y}{b} - \frac{z}{c}} = \lambda$$

أو بالشكل :

$$(2) \quad \frac{\frac{y}{b} + \frac{z}{c}}{1 - \frac{x}{a}} = \frac{1 + \frac{x}{a}}{\frac{y}{b} - \frac{z}{c}} = \mu$$

والمعادلات (1) تمثل حزمة مستقيبات الأمثال الموجبة لكل منها

وتمثل المعادلات (2) حزمة مستقيبات الأمثال الموجبة لكل منها

$[2\lambda a, b(\lambda^2 - 1), c(\lambda^2 + 1)]$ فشرط التعامد هو $\lambda, \mu = \frac{a^2}{c^2}$ ولكننا نجد بحل

(1) و (2) أن :

$$x = a \frac{\mu - \lambda}{\mu + \lambda} ; y = b \frac{\mu \lambda + 1}{\mu + \lambda} ; z = c \lambda \frac{\mu \lambda - 1}{\mu + \lambda}$$

وبالاعتماد على شرط التعامد نجد المنحنى المطلوب :

$$x = a \frac{a^2 - c^2 \lambda^2}{a^2 + c^2 \lambda^2} ; y = b \lambda \frac{a^2 + c^2}{a^2 + c^2 \lambda^2} ; z = c \lambda \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2 \lambda^2}$$

ونحصل على هذا المنحني من تقاطع الجسم المفروض مع المستوي :

$$z/y = c (a^2 - c^2) / b (a^2 + c^2)$$

٣٤٦ - بين بأن الجسم المعين بالمعادلة :

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz + 2x + 2 = 0$$

هو جسم قطع ناقص .

الحل :

إذا قطعنا هذا الجسم بمستوي $z = c$ فاننا نحصل على معادلة من الدرجة

الثانية في x و y هي :

$$x^2 + 2y^2 - 2xy + 2(1+c)x + 2 + 3c^2 = 0$$

وبما أن $AC - B^2 = 1 > 0$ فالمعادلة تمثل بوجه عام قطعاً ناقصاً .

ونحصل على الأمر نفسه إذا قطعنا الجسم بالمستوي $x = c$ أو بالمستوي $y = c$ فالجسم هو جسم قطع ناقص وهو المطلوب .

مسائل وممارين غير محلولة

٣٤٧ - أوجد معادلة جسم القطع المكافئ الناقص الذي تقع ذروته

في O ومحوره OZ ويمر بالنقطتين $(3, 0, 1)$ و $(3, 2, 2)$

٣٤٨ - تتحرك نقطة M بحيث يكون مجموع بعدها عن النقطتين

$(0, 3, 0)$ و $(0, -3, 0)$ يساوي ٨ ، فما هو المحل الهندسي لهذه النقطة .

٣٤٩ - ما هو المحل الهندسي للنقط التي مربع بعدها عن المحور OZ

يساوي ضعف بعدها عن المستوي xoy .

المُجَوِّبَةُ

$$4x^2 + 9y^2 = 36z \quad - ٣٤٧$$

$$16x^2 + 7y^2 + 16z^2 = 112 \quad - ٣٤٨$$

$$x^2 + y^2 - 2z = 0 \quad - ٣٤٩$$

مسائل عامة

٣٥٠ - O نقطة ثابتة و D مستقيم ثابت . M_1 و M_2 نقطتان متحولتان

على D بحيث يكون قياس $\widehat{M_1OM_2}$ ثابتاً ومساوياً إلى α .

(١) أوجد المحل الهندسي لـ ω مركز الدائرة (c) المرسومة على

المثلث OM_1M_2 .

(٢) لتكن الدائرة (C_1) المارة من النقطتين O و M_1 والتي يقع

مركزها ω_1 على OM_1 والدائرة (C_2) المارة من النقطتين O و M_1 والتي

يقع مركزها ω_2 على OM_2 برهن أن كلا من الدائرتين (C_1) و (C_2)

تمر بنقطة ثابتة غير النقطة O .

(٣) أوجد المحل الهندسي لنقطة تقاطع (C_1) و (C_2) .

(٤) أوجد المحل الهندسي لمراكز الدوائر المرسومة على كل من المثلثين

$\omega_1\omega_2\omega$ ، $\omega_1\omega\omega_2$.

٣٥١ - ليكن القطع المكافئ $y^2 - 2px = 0$ وليكن $A(a, 0)$

نقطة من محور القطع . ننشئ من هذه النقطة مستقيماً متحولاً يقطع

القطع في P و Q . ولنعبر الدائرة المارة من هاتين النقطتين ومن ذروة

القطع . أوجد :

(١) المحل الهندسي لمركز الدائرة . (٢) المحل الهندسي لنقطة تقاطع

القواطع المشتركة بين الدائرة والقطع .

(٣) المحل الهندسي لمسقط نقطة التقاطع الرابعة ، بين الدائرة والقطع ،

على الوتر pQ .

٣٥٢ - A_1 و A_2 و A_3 ثلاث نقط من قطع ناقص محرقه F ، عين عناصر

هذا القطع إذا علمت أن :

$$\overline{FA_1} = 2 \overline{FA_2} = 4 \overline{FA_1} = 8$$

$$\widehat{FA_1, FA_2} = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \widehat{FA_1, FA_2} = \pi \quad : \text{ وأن } :$$

٣٥٣ - لدينا المستقيم المتحول D يقطع المحاور الاحداثية ox و oy في النقطتين A و B على شكل يكون فيه $\overline{OA} = \overline{OB} = a$.

(١) برهن أن المحل الهندسي لنقطة M تتحول على شكل يكون فيه

مجموع مربعات ابعادها عن اضلاع المثلث BAO يساوي $\frac{a^2}{2}$ هو قطع ناقص . (٢) اختزل معادلة القطع ثم ارسمه .

٣٥٤ - A_1 و A_2 نقطتان مع قطع مكافئ مجرقه F . عين وسيط القطع إذا علمت أن :

$$\overline{FA} = 3 \overline{FA_1} = 6 \quad ; \quad \widehat{FA_1, FA_2} = \pi$$

٣٥٥ - ليكن القطع الناقص $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ والمستقيم Δ الذي معادلته $y = m x + n$. يقطع هذا المستقيم القطع المافروض في النقطتين A و B .

(١) اكتب معادلة الدائرة التي تقبل AB قطراً لها . (٢) تقطع هذه الدائرة القطع في نقطتين أخريتين C و D أوجد عندما يتحول Δ موازياً لنفسه المحل الهندسي لـ M ، نقطة تقاطع AB مع CD ، والمحل الهندسي لـ P نقطة تقاطع AC مع BD والمحل الهندسي لـ Q نقطة تقاطع AD مع BC .

$$x^2 + y^2 = 2x + 1 \quad : \text{ دائرة معادلها } (c) - ٣٥٦$$

(١) يطلب كتابة معادلة القطوع (A) التي تمس هذه الدائرة مرتين بحيث يمر الوتر المار من نقطتي التقاطع من مبدأ الاحداثيات . يفرض

فوق ذلك أن هذه القطوع تمس المستقيم (D) الذي معادلته :

$$y = x \sqrt{3} + \sqrt{3}$$

(٢) ير بصورة عامة من النقطة الكيفية $M(\alpha, \beta)$ قطعان من المجموعة (A) نرمز لهما بـ (A') و (A'') أين تقع النقطة M ليكون هذان القطعان حقيقيين ؟

(٣) يتقاطع القطعان (A') و (A'') المشتركان في النقطة M في ثلاث نقاط أخرى نرمز لها بـ M_1 و M_2 و M_3 . يطلب حساب احداثيات هذه النقط بدلالة (α, β) واحداثيي النقطة M.

(٤) اكتب معادلة القطع الزائد المتساوي الساقين (H) الذي يمر من النقاط الأربعة (M, M_1, M_2, M_3) وبرهن أن هذا القطع يمر بأربع نقاط ثابتة عندما تتحول النقطة M.

٣٥٧ - ليكن القطع المكافئ $y^2 = 2x$ والنقطة الثابتة $F(a, 0)$ ولنفرض مستقيما ميّله $\frac{1}{m}$ يمر من F ويقطع القطع المكافئ في النقطتين M_1 و M_2 المنحولتين بتحول القاطع. اكتب معادلة الدائرة التي قطرها M_1 و M_2 وبرهن أن هذه الدائرة متعامدة مع دائرة ثابتة.

٣٥٨ - برهن أن المستقيمين :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x + 3y + 3z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 + z \\ y = -1 - 3x \end{cases}$$

متقاطعان. عين احداثيات نقطة التقاطع. اكتب معادلة المستوي P

المعين بهذين المستقيمين احسب مركبات الشعاع \vec{AB} على المحاور الاحداثية حيث $A(2, 5, 0)$ و B مرسم A على المستوي (P).

الاجوبة

٣٥٠ - (١) قطع زائد محرقه o ودليله D وتباعده المركزي $\frac{1}{\cos \alpha}$

(٣) دائرة مركزها ٠ ٠ (٤) قطعان زائدان محرقها المشترك ٠ وتباعدهما
المركزي $\frac{1}{\cos \alpha}$.

$$y^2 = \frac{a^2}{4p} \left(x - p - \frac{a}{2} \right) \quad (١) - ٣٥١$$

$$a^2 y^2 = 2 p x^2 (2 x + a) \quad , \quad 2 x = a \quad (٢)$$

$$y^4 + y^2 (x - a) (x + 2 p) = 2 p (x - a)^2 \quad (٢)$$

$$b = \frac{16 \sqrt{15}}{15} \quad ; \quad a = \frac{16}{3} \quad - ٣٥٢$$

$$8 x^2 + 4 y^2 = a^2 \quad - ٣٥٣$$

$$p = 3 \quad - ٣٥٤$$

$$(a^2 m^2 + b^2) (x^2 + y^2) + 2 a^2 m n x - 2 b^2 n y \quad (١) - ٣٥٥$$

$$+ (a^2 + b^2) n^2 - a^2 b^2 (1 + m^2) = 0$$

$$b^2 m x - a^2 y = 0 \quad : M \text{ المحل الهندسي}$$

$$: Q, P \neq$$

$$(a^2 m^2 + b^2) x y (x + m y) = m (b^4 x + a^4 m y)$$

$$(x^2 + y^2 - 2 x - 1) (m^2 + 3) = 2 (y - m x)^2 \quad (١) - ٣٥٦$$

$$(x^2 + y^2 - 2 x - 1) (x \sqrt{3} + \sqrt{3} - y) (x \sqrt{3} + \sqrt{3} + y) > 0 \quad (٢)$$

$$نضع M_1 على OM ونصلها $\alpha / 2 \alpha + 1$ وأما M_2 و M_3 فتتبعان$$

على المستقيم $3 \alpha x + \beta y = 0$ ويحقق فصلها المادة :

$$(6 \alpha^2 + 2 \beta^2 - 6 \alpha - 3) x^2 - 2 \beta^2 x - \beta^2 = 0$$

$$\alpha \beta (y^2 - x^2 - 2 x - 1) = x y (\beta^2 - \alpha^2 - 2 \alpha - 1) \quad (٤)$$

$$(x - a - m^2)^2 + (y - m)^2 = (1 + m^2) (2 a + m^2) - ٣٥٧$$

$$x^2 + y^2 = a^2 - 2 a$$

$$(-4, -2, -2) : 2 x + y + z + 3 = 0 : (-2, 5, -4) - ٣٥٨$$

أبحاث الكتاب

رقم الصفحة	رقم الفصل	البحث
٥	١	الاحداثيات والأشعة
٦٩	٢	المنحني ونقل المحاور الاحداثية
١٠٣	٣	المستقيم في المستوي وتطبيقاته
١٥٠	٤	المستوي والمستقيم في الفراغ
١٩٩	٥	الدائرة في المستوي
٢٣٤	٦	الكرة والدائرة في الفراغ
٢٤٧	٧	القطع الناقص
٢٧١	٨	القطع الزائد
٢٩٤	٩	القطع المكافئ
٣١١	١٠	المعادلة العامة لمنحنيات الدرجة الثانية
٣٢٨	١١	سطوح الدرجة الثانية
٣٣٢		مسائل عامة